

Ленинградский ордена Ленина и ордена Трудового  
Красного Знамени государственный университет  
им. А. А. Жданова

**П.Я. УФИМЦЕВ**

**ТРИ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ  
ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ**

**Издательство  
Ленинградского университета  
1972**

**Академия Наук СССР**  
**Министерство высшего и среднего**  
**специального образования РСФСР**

**ТРЕТЬЯ ВСЕСОЮЗНАЯ ШКОЛА-СЕМИНАР**  
**ПО ДИФРАКЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЮ**  
**ВОЛН**

**Ленинградский ордена Ленина и ордена Трудового  
Красного Знамени Государственный университет им.А.А.Жданова**

**П.Я.УФИМЦЕВ**

**Три лекции по физической теории дифракции**

**Издательство  
Ленинградского университета  
1972**

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РСФСР

ТРЕТЬЯ ВСЕСОЮЗНАЯ ШКОЛА-СЕМИНАР ПО ДИФРАКЦИИ  
И РАСПРОСТРАНЕНИЮ ВОЛН

Ленинград-Петродворец  
20 мая - 6 июня 1972 г.

## ФИЗИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ

П.Я. УФИМЦЕВ

### Введение

Важное место в теории дифракции волн квазиоптического диапазона занимают приближенные методы, основанные на различных физических предположениях. Эти методы охватывают широкий круг вопросов, возникающих на практике, которые в настоящее время не могут быть решены точно. Работы такого характера довольно многочисленны и составляют большой раздел, который можно назвать физической теорией дифракции. Этот раздел теории дифракции включает в себя две большие группы. К первой относятся классические приближенные методы, связанные с именами Гюйгенса, Огюста, Френеля, Кирхгофа и Котлера. Вторую группу образуют работы, посвященные дальнейшему развитию приближенных методов для коротких волн, выполненные в последние 15-20 лет.

Мы не собираемся заниматься здесь подробным историческим обзором физических методов в теории дифракции. Краткие обзоры такого рода можно найти, например, в нашем курсе [1], прочитанном в I-й Всесоюзной школе по дифракции (Паланга, 1965 г), в книгах [2,3] и в ряде других работ. В данном курсе мы ставим своей целью ознакомить слушателей лишь с основными представлениями физической теории дифракции на примере нескольких, наиболее характерных методов, нашедших практическое применение. Три лекции, входящие в данный курс, слабо связаны друг с другом, и каждая может изучаться независимо.

Лекция 1

Теория Кирхгофа-Котлера и дифракция электромагнитных волн  
на черных телах

В этой лекции мы рассмотрим математическую формулировку принципа Гюйгенса и применим его к задаче о дифракции электромагнитных волн на черных телах.

Гюйгенс был первым, кто предложил волновую модель распространения света. Согласно этой модели каждую точку поверхности волнового фронта можно рассматривать как элементарный источник вторичных сферических волн. Положение волнового фронта в момент времени  $t$  может быть построено как огибающая вторичных волновых фронтов с радиусом  $c(t-t_0)$ , излучаемых волновым фронтом в момент  $t_0$ . Такая модель распространения света имеет серьезные дефекты, которые Гюйгенс устраняет с помощью специальных гипотез. Во-первых, для объяснения прямолинейного распространения света предполагается, что вторичные волны создают поле только в точках, принадлежащих к огибающей вторичных волновых фронтов. Во-вторых, каждая такая огибающая состоит из двух оболочек: внутренней и внешней. Внешняя оболочка соответствует волне, распространяющейся от источника, а внутренняя оболочка - "обратной" волне, идущей назад к источнику. Поскольку в однородной среде "обратные" волны не существуют, Гюйгенс предположил, что распространяться может только внешний волновой фронт.

Строгая математическая формулировка принципа Гюйгенса была дана Гельмгольцем (1859 г) для скалярных волновых полей и Котлером (1923г) для электромагнитных полей.

§ I. Принцип Гюйгенса в электродинамике

Приступим к изложению принципа Гюйгенса для монохроматических электромагнитных полей, изменяющихся во времени по закону  $e^{-i\omega t}$ . Для простоты рассмотрим поля в вакууме. В этом случае комплексные амплитуды электрического и магнитного векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= i\kappa \vec{H} - \frac{4\pi}{c} \vec{j}^m, \\ \text{rot} \vec{H} &= -i\kappa \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^e. \end{aligned} \quad (I.01)$$

Здесь, как и всюду далее, используется абсолютная система единиц;  $\vec{j}^e, \vec{j}^m$  — плотность сторонних электрических или магнитных токов,  $\kappa = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число,  $c$  — скорость света в вакууме.

Воспользуемся далее теоремой единственности. Будем считать, что электрические и магнитные токи расположены на конечных расстояниях ( $R < R_{\text{max}}$ ), и добавим к уравнениям (I.01) принцип излучения Зоммерфельда

$$\vec{E} \approx \vec{e}(\vartheta, \varphi) \frac{e^{i\kappa R}}{R}, \quad \vec{H} \approx \vec{h}(\vartheta, \varphi) \frac{e^{i\kappa R}}{R} \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \quad (I.02)$$

где знак  $\approx$  показывает, что равенства удовлетворяются с абсолютной погрешностью, пропорциональной  $1/R^2$ , а  $R, \vartheta, \varphi$  — сферические координаты. Принцип излучения показывает, что поле вдали от источников (электрических и магнитных токов) имеет вид расходящейся сферической волны;  $\vec{e}(\vartheta, \varphi)$  и  $\vec{h}(\vartheta, \varphi)$  — векторные характеристики излучения этой волны, связанные соотношением

$$\vec{h} = [\vec{n} \vec{e}], \quad (I.03)$$

вытекающим из однородных уравнений (I.01) в дальней зоне;

$\vec{n}$  - единичный вектор в направлении распространения сферической волны (I.02);  $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$ . Согласно соотношению (I.03) мы имеем

$$[\vec{e} \vec{h}^*] = [\vec{e} [\vec{n} \vec{e}^*]] = \vec{n} (\vec{e} \vec{e}^*) = \vec{n} |\vec{e}|^2, \quad (I.04)$$

$$[\vec{E} \vec{H}^*] \approx \frac{\vec{n}}{R^2} |\vec{e}|^2 \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \quad (I.05)$$

поскольку  $\vec{n} \vec{e} = 0$  (поперечность полей в дальней зоне!).

Согласно формуле (I.05) поток комплексного вектора Пойнтинга через бесконечно удаленную сферу всегда положителен или равен нулю:

$$\int [\vec{E} \vec{H}^*] \vec{n} dS \approx \int |\vec{e}|^2 d\Omega \geq 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \quad (I.06)$$

где  $d\Omega$  - элемент телесного угла, то есть

$$dS = R^2 d\Omega, \quad d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (I.07)$$

а знак равенства в формуле (I.06) возможен только при полном отсутствии излучения на бесконечность.

Учитывая соотношение (I.06) и применяя теорему о комплексной мощности (см. [4]) нетрудно доказать единственность решения уравнений (I.01) при условиях (I.02). Для этого достаточно доказать, что при  $\vec{j} \equiv 0$  и  $\vec{j}_m \equiv 0$  единственное



решение задачи - это тождественно равное нулю поле:  $\vec{E} \equiv 0$  и  $\vec{H} \equiv 0$ . Опуская выкладки, отметим, что в отсутствие источников (токов  $\vec{j}^e$  и  $\vec{j}^m$ ), возбуждающих поле, оно может появиться только благодаря притоку энергии из бесконечности. Однако, в силу неравенства (I.06), энергия всегда уходит на бесконечность, поэтому электромагнитное поле может в данном случае быть только тождественным нулём.

Единственность сохраняется и в случае, когда вместо объемных плотностей  $\vec{j}^e$  и  $\vec{j}^m$  мы имеем поверхностные плотности  $\vec{i}^e$  и  $\vec{i}^m$ .

Последние могут появиться, если мы рассматриваем произвольное электромагнитное поле, удовлетворяющее однородным уравнениям Максвелла

$$\text{rot} \vec{E} = ik\vec{H}, \quad \text{rot} \vec{H} = -ik\vec{E} \quad (\text{I.08})$$

внутри некоторой замкнутой поверхности  $S$  (рис. I.I) и равное нулю вне  $S$ . Поле внутри  $S$  создается какими-то источниками вне  $S$  (крестики на рис. I.I), и мы покажем, что там эти источники могут быть заменены поверхностными токами:

$$\vec{i}^e = \frac{c}{4\pi} [\vec{n} \vec{H}], \quad \vec{i}^m = -\frac{c}{4\pi} [\vec{n} \vec{E}], \quad (\text{I.09})$$

где  $\vec{n}$  - нормаль, направленная внутрь  $S$  (в сторону поля).

Интересующее нас поле  $\vec{E}, \vec{H}$  вне  $S$  тождественно равно нулю и, следовательно, формально удовлетворяет как уравнениям (I.08), так и условиям (I.02), последним при  $\vec{E} \equiv 0$  и  $\vec{H} \equiv 0$ . Источник этого поля - поверхностные токи (I.09), которыми это поле определяется однозначно, а именно по формулам

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{i}{k} (q \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}^e + k^2 \vec{A}^e) - \operatorname{rot} \vec{A}^m, \\ \vec{H} &= \frac{i}{k} (q \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}^m + k^2 \vec{A}^m) + \operatorname{rot} \vec{A}^e,\end{aligned}\quad (I.10)$$

где  $\vec{A}^e, \vec{A}^m$  - электрический и магнитный векторные потенциалы. Они связаны с плотностями токов известными соотношениями

$$\begin{aligned}\vec{A}^e &= \frac{1}{c} \oint \frac{e}{R} \vec{r}^e dS = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{e}{R} [\vec{n} \vec{H}] dS, \\ \vec{A}^m &= \frac{1}{c} \oint \frac{e}{R} \vec{r}^m dS = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{e}{R} [\vec{n} \vec{E}] dS,\end{aligned}\quad (I.11)$$

где  $R$  - расстояние между точкой наблюдения и точкой интегрирования - элементом  $dS$  поверхности  $S$  - по которой и производится интегрирование.

В этих формулах скалярными потенциалами, связанными с плотностями зарядов, мы не пользуемся, поскольку в монохроматических полях плотности зарядов однозначно определяются токами. Фактически слагаемые  $\frac{i}{k} q \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}^{e,m}$  в формулах (I.10) равны  $- \operatorname{grad} \Phi^{e,m}$ , где  $\Phi^{e,m}$  - скалярные потенциалы.

Таким образом, из теоремы единственности следует, что поле  $\vec{E}, \vec{H}$ , вычисленное по формулам (I.10) и (I.11), на внутренней стороне поверхности  $S$  принимает значение, входящее в формулы (I.09) и (I.11), а на внешней - нулевые значения и равно нулю всюду вне  $S$ .

Формулы (I.10) и (I.11) дают нам искомое представление поля  $\vec{E}, \vec{H}$  внутри  $S$  через "вторичные источники" на  $S$ , т.е. представляют собой электродинамический принцип Гюйгенса. Условие

$$\vec{E} \equiv 0, \quad \vec{H} \equiv 0 \quad \text{вне } S \quad (I.12)$$

обычно трактуют как условие отсутствия обратной волны: вторичные источники создают только прямую волну (внутри  $S$ ).

Если (как это чаще всего бывает) источники поля расположены внутри  $S$  (рис. 1.2 - крестики), а нас интересует поле вне  $S$ , то выведенные выше соотношения остаются в силе, если  $\vec{n}$  направить в сторону, где мы ищем поле (рис. 1.2), и заменить в формулировках слова "вне  $S$ " на "внутри  $S$ " и наоборот. Соотношения (I.10) и (I.11) дают решение и для такой обращенной задачи.

Принцип Гюйгенса является могучим и исключительно плодотворным математическим аппаратом во многих областях науки и техники. Так, скалярный вариант этого принципа широко используется для исследования волновых задач в акустике и теоретической оптике. Электродинамический принцип Гюйгенса с успехом применяется в теории антенн и в радиолокации. В теории зеркальных антенн он является основным, а порой и единственным методом расчета диаграмм излучения. Располагая поверхность  $S$  на раскрыве антенны и задавая на ней приближенные значения полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , найденных по законам геометрической оптики, мы приходим к так называемому апертурному методу расчета диаграмм.

Если нас интересует поле, отраженное каким-либо металлическим телом назад к радиолокатору, то его величину можно найти, выбирая в качестве  $S$  поверхность тела. При этом магнитные токи будут равны нулю, а электрические токи можно задать приближенно, например с помощью геометрической оптики. Такой подход называют приближением физической оптики и он находит широкое применение для оценки полей, рассеянных металлическими телами. Для тел с изломами это приближение можно уточнить, если ввести в распределение полей на  $S$  поправки, связанные с изломом, счи-

тая их такими же, как на соответствующем двугранном угле. Такой подход используется при построении ряда приближенных методов, один из которых - метод краевых волн - будет рассмотрен во 2-й лекции нашего курса.

В данной лекции мы рассмотрим лишь один пример применения электродинамического принципа Гюйгенса - дифракцию электромагнитных волн на черных телах.



Рис. 1.1 и 1.2. Положение источников поля относительно поверхности .

## § 2. Определение черного тела и теорема о теновом контуре.

Применим теперь сформулированные выше теоремы к задаче о дифракции электромагнитных волн на черных телах. Хотя в электродинамике принципиально нельзя сформулировать граничные условия, адекватные черному телу, тем не менее такое абстрактное понятие оказывается полезным при оценке поля, рассеянного хорошо поглощающими телами. Физически черное тело можно аппроксимировать средой с очень плавным изменением электромагнитных параметров, для которой коэффициент отражения близок к нулю (среда с идеально "мягким входом").

Применительно к задачам дифракции понятие черного тела впервые было сформулировано Кирхгофом в конце прошлого века в связи с исследованием дифракции скалярных волн на тонких непрозрачных краях. В дальнейшем Котлер распространил понятие плоского черного экрана на случай электромагнитных волн. Хорошее изложение этих вопросов имеется в книге [5]. Мы покажем, что определение черного тела, данное Котлером, может быть распространено на объемные тела произвольной формы.

Вычислим поле в точке  $P$ , возникающее при дифракции электромагнитных волн на некотором теле (рис. I.3).

Применим формулы (I.10) и (I.11) к поверхности  $S = \Sigma + S^0 + S^1$  ( $S^0$  - освещенная сторона тела,  $S^1$  - теневая), предполагая, что все источники находятся вне  $S$ . На поверхности  $\Sigma$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_\Sigma, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_\Sigma, \quad (I.13)$$

где  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  - поле источников, находящихся вне объема, ограниченного поверхностью  $\Sigma$ , а  $\vec{E}_\Sigma, \vec{H}_\Sigma$  - поле, рассея-

ное тело. В силу формулы (I.12) эквивалентные токи на поверхности  $\Sigma$ , обусловленные полем  $\vec{E}_\chi, \vec{H}_\chi$ , создают внутри  $\Sigma$  поле, равное нулю. Следовательно, внутри  $S$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 + \vec{E}^0 + \vec{E}^1, \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 + \vec{H}^0 + \vec{H}^1,\end{aligned}\quad (I.14)$$

где  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  - поле от токов на освещенной стороне тела,  
 $\vec{E}^1, \vec{H}^1$  - поле от токов на теневой стороне.

Будем считать тело абсолютно черным, т.е. поглощающим всю падающую на него энергию, и определим это понятие согласно Кирхгофу-Котлеру следующим образом :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \quad \text{на } S^0, \\ \vec{E} &= \vec{H} = 0 \quad \text{на } S^1\end{aligned}\quad (I.15)$$

Тогда результирующее поле, возникающее вследствие дифракции электромагнитных волн на черном теле, будет равно

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}^0, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}^0, \quad (I.16)$$

а вклад от затененной части тела равен нулю.

Данное определение черного тела некорректно: нельзя произвольно и одновременно задавать граничные значения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Вследствие указанной некорректности приближение (I.16) является несамоогласованным: значения  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , вычисленные по формуле (I.16) на поверхности черного тела, не совпадают с первоначально принятыми значениями (I.15).

Однако еще Котлер [ 6 ] отметил, что приближение (I.16) для черных бесконечно тонких экранов можно рассматривать как строгое решение задачи с граничным скачком / *Springwertproblem* ), когда на тангенциальные компоненты  $E_t$  и  $H_t$  накладываются условия

$$E_t|_{S^0} - E_t|_{S^1} = E_{ot}, \quad H_t|_{S^0} - H_t|_{S^1} = H_{ot}. \quad (I.17)$$

Но такое определение черного тела, в отличие от определения (I.15), имеет смысл только для тонких экранов и непригодно для объемных тел.

Продолжим изучение формул (I.16). Назовем границу между освещенной и теневой частями поверхности тела теневым контуром и сравним поля, рассеянные двумя различными черными телами, которые имеют один и тот же теневой контур. Освещенную сторону одного из этих тел обозначим через  $S_1$ , освещенную сторону другого - через  $S_2$ . Поля, рассеянные этими телами, обозначим соответственно через  $\vec{E}_{S_1}, \vec{H}_{S_1}$  и  $\vec{E}_{S_2}, \vec{H}_{S_2}$ .

Применим теперь к объему  $V$ , ограниченному воображаемыми поверхностями  $S_1$  и  $S_2$  (рис. I.4) и находящемуся в поле  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ . Тогда

$$\vec{E}_{S_1} - \vec{E}_{S_2} = -\vec{E}_0, \quad \vec{H}_{S_1} - \vec{H}_{S_2} = -\vec{H}_0, \quad (I.18)$$

если точка наблюдения  $P$  находится внутри объема  $V$ , и

$$\vec{E}_{S_1} - \vec{E}_{S_2} = 0, \quad \vec{H}_{S_1} - \vec{H}_{S_2} = 0, \quad (I.19)$$

если точка наблюдения  $P$  расположена вне объема  $V$ .

Таким образом, соотношение (I.14) позволяет сформулировать следующую теорему о "теновом контуре":

поле, рассеянное черными телами (при заданной взаимной ориентации источников и тела), не зависит от формы поверхности тела и полностью определяется его теновым контуром (границей между освещенной и теневой частями поверхности тела).

Заметим, что эта теорема доказана здесь для произвольного первичного поля  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{H}_0$ , падающего на черное тело, тогда как у Котлера [6] ее доказательство было дано только для случая сферических и плоских электромагнитных волн.

Можно дать следующее физическое объяснение сформулированной теоремы. Различные черные тела, имеющие одинаковый теневой контур (при заданном направлении падающей волны!), создают одинаковую тень. Но тень можно рассматривать как результат наложения вторичного излучения на первичное поле. Вследствие поперечной диффузии энергия теневого излучения (лепестка) проникает в остальное пространство и является единственным источником рассеянного поля, поскольку в силу определения черного тела его освещенная сторона ничего не отражает. Следовательно, различные черные тела, имеющие одинаковый теневой контур, создают одинаковые рассеянные поля.

В заключение параграфа отметим, что формулы (I.16), (I.10) и (I.11) позволяют дать следующую формальную интерпретацию дифракции электромагнитных волн на черном теле. Черное тело является одновременно как бы идеально "электрическим" ( $\varepsilon = i\infty$ ,  $\mu = 1$ ) и идеально "магнитным" ( $\mu = i\infty$ ,  $\varepsilon = 1$ ). Половина падающей на тело энергии дифрагирует на нем (в приближении физической оптики!) как на идеально "электрическом" теле, а другая половина - как на идеально "магнитном" теле. Такое представление о черном теле более детально



развито в работе Леманского и Захарьева [7].

### § 3. Принцип дополнительности для тонких черных экранов

Пусть в свободном пространстве, в области  $z < 0$ , находятся сторонние источники электромагнитного поля. Рассмотрим две следующих задачи.

1). Дифракция электромагнитных волн на бесконечно тонкой черной пластине  $S$  (плоской или изогнутой), см.рис. 1.5,а.

2). Дифракция на "дополнительном" черном экране  $\Sigma$  (плоском или изогнутом), который вместе с поверхностью  $S$  делит пространство на две части (рис. 1.5,б).

Связь между решениями этих задач устанавливает формулируемый ниже принцип дополнительности.

Обозначим через  $\vec{E}_S, \vec{H}_S$  поле, рассеянное пластиной  $S$ , через  $\vec{E}_\Sigma, \vec{H}_\Sigma$  - поле, рассеянное дополнительным экраном. Согласно формулам (I.10), (I.12) имеем

$$\vec{E}_S = -\vec{E}_\Sigma, \quad \vec{H}_S = -\vec{H}_\Sigma, \quad (I.20)$$

если точка наблюдения  $P$  находится в объеме  $z < 0$ , и

$$\vec{E}_S + \vec{E}_\Sigma = -\vec{E}_0, \quad \vec{H}_S + \vec{H}_\Sigma = -\vec{H}_0, \quad (I.21)$$

если точка  $P$  принадлежит объему  $z > 0$  (см.рис. 1.5).

#### § 4. Интегральный поперечник рассеяния для черных тел

Интегральный поперечник рассеяния определяется формулой

$$\sigma = \frac{P}{p}, \quad (I.22)$$

где

$$p = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 \quad (I.23)$$

есть усредненная за период колебаний плотность потока энергии в падающей волне, а

$$P = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{\vec{n}} [\vec{E} \vec{H}^*] dS \quad (I.24)$$

— среднее за период значение энергии, рассеиваемой в окружающее пространство. Интегрирование в формуле (I.24) производится по любой замкнутой поверхности, охватывающей тело. Выбирая в качестве поверхности интегрирования поверхность черного тела, получим

$$P = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{S^1} [\vec{E}_0 \vec{H}_0^*] dS, \quad (I.25)$$

ибо на освещенной стороне ( $S^0$ ) черного тела рассеянное поле по определению равно нулю, а на теневой стороне ( $S^1$ )  $\vec{E} = -\vec{E}_0$ ,  $\vec{H} = -\vec{H}_0$ .

Считая, далее, что на тело падает плоская волна, получим

$$P = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 \int_{S^1} (\vec{n} \vec{N}) dS = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 S_0. \quad (I.26)$$

Здесь  $S_0$  есть площадь поперечного сечения геометрической зоны тени (рис. I.6). Следовательно, интегральный поперечник рассеяния для черного тела равен

$$\sigma = S_0 \quad (I.27)$$

Заметим, что для выпуклых идеально проводящих тел, все линейные размеры которых велики по сравнению с длиной волны, интегральный поперечник рассеяния равен  $2S_0$ . Таким образом, интегральный поперечник рассеяния для черного тела всего лишь вдвое меньше интегрального поперечника для металлического тела, имеющего тот же теневой контур.

Рассмотрим теперь наиболее интересный вопрос: какую величину имеет поле, отраженное черным телом в направлении на источник падающей волны?

#### § 5. Поле, излучаемое черным телом в направлении на источник.

Пусть на черное тело произвольной формы падает плоская электромагнитная волна

$$E_x = e^{ik(x \cos \gamma + y \sin \gamma)}, \quad H_x = 0, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}. \quad (I.28)$$

На поверхности тела она возбуждает электрические и магнитные токи

$$\left. \begin{aligned} i_x^e &= -\frac{c}{4\pi} (n_z \cos \gamma + n_y \sin \gamma) E_x, & i_x^m &= 0 \\ i_y^e &= \frac{c}{4\pi} n_x \sin \gamma E_x, & i_y^m &= -\frac{c}{4\pi} n_z E_x, \\ i_z^e &= \frac{c}{4\pi} n_x \cos \gamma E_x, & i_z^m &= \frac{c}{4\pi} n_y E_x \end{aligned} \right\} \quad (I.29)$$

Здесь  $n_x, n_y, n_z$  — декартовы компоненты внешней нормали к поверхности тела. Рассеянное поле, излучаемое этими токами, определяется формулами (I.10) и (I.11), которые для дальней зоны могут быть представлены в сферической системе координат следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= ik(A_{\vartheta}^e - A_{\vartheta}^m), \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= ik(A_{\vartheta}^e + A_{\vartheta}^m). \end{aligned} \quad (I.30)$$

Используя формулы (I.29), находим

$$\begin{aligned} E_{\varphi} = -H_{\vartheta} &= \frac{ik}{4\pi} \oint \frac{e^{ikR}}{R} (f_{\vartheta}^e - f_{\vartheta}^m) dS, \\ E_{\vartheta} = H_{\varphi} &= \frac{ik}{4\pi} \oint \frac{e^{ikR}}{R} (f_{\vartheta}^e + f_{\vartheta}^m) dS, \end{aligned} \quad (I.31)$$

где

$$\begin{aligned} f_{\vartheta}^e &= [(n_z \cos \vartheta + n_y \sin \vartheta) \sin \varphi + n_x \sin \vartheta \cos \varphi] E_x, \\ f_{\vartheta}^m &= -(n_y \sin \vartheta + n_z \cos \vartheta \sin \varphi) E_x, \\ f_{\vartheta}^e &= [(n_y \sin \vartheta + n_z \cos \vartheta) \cos \vartheta \cos \varphi + n_x (\sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi - \cos \vartheta \sin \vartheta)] E_x, \\ f_{\vartheta}^m &= -n_z \cos \vartheta E_x. \end{aligned} \quad (I.32)$$

В направлении на источник, которое определяется координатами  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\vartheta = \pi - \gamma$ , имеем

$$f_{\vartheta}^e - f_{\vartheta}^m = f_{\vartheta}^e + f_{\vartheta}^m = 0, \quad (I.33)$$

и, следовательно, рассеянное поле (I.31) равно нулю.

При облучении черного тела электромагнитной волной

$$H_x = e^{ik(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)}, E_x = 0 \quad (I.34)$$

(с перпендикулярной по отношению к (I.28) поляризацей) на поверхности тела возбуждаются токи

$$\left. \begin{aligned} i_x^e &= 0, & i_x^m &= -\frac{c}{4\pi} (n_y \sin \vartheta + n_z \cos \vartheta) H_x, \\ i_y^e &= \frac{c}{4\pi} n_z H_x, & i_y^m &= \frac{c}{4\pi} n_x \sin \vartheta H_x, \\ i_z^e &= -\frac{c}{4\pi} n_y H_x, & i_z^m &= \frac{c}{4\pi} n_x \cos \vartheta H_x. \end{aligned} \right\} \quad (I.35)$$

Рассеянное поле в этом случае по-прежнему описывается выражениями (1.31), в которых теперь

$$\begin{aligned} f_y^e &= n_z \cos \varphi H_x, & f_y^e &= (n_y \sin \vartheta + n_z \cos \vartheta \sin \varphi) H_x, \\ f_y^m &= [(n_y \sin \vartheta + n_z \cos \vartheta) \sin \varphi + n_x \sin \vartheta \cos \varphi] H_x, \\ f_z^m &= [-(n_y \sin \vartheta + n_z \cos \vartheta) \cos \vartheta \cos \varphi + n_x (\sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi - \cos \vartheta \sin \vartheta)] H_x, \end{aligned} \quad (I.36)$$

и

$$f_y^e - f_z^m = f_z^e + f_y^m = 0 \quad \text{при } \varphi = -\frac{\pi}{2}, \vartheta = \pi - \vartheta.$$

Таким образом, оказывается, что поле, отраженное черным телом в направлении на источник, равно нулю.

Ниже, на примере решения задачи о дифракции плоской волны на черном диске, мы познакомимся более детально с характеристиками поля, рассеянного черными телами.

### § 6. Дифракция на черном диске.

Рассмотрим дифракцию на черном диске плоской волны (I.28). Координатные оси выбираем так, чтобы нормаль  $\vec{N}$  к фронту падающей волны лежала в полуплоскости  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (рис. I.7). Радиус диска обозначим через  $a$ .

Рассеянное поле определяется формулами (I.I0) и (I.II).

В рассматриваемом случае

$$[\vec{n} \cdot \vec{H}]_x = \cos \vartheta e^{ikR \sin \varphi \sin \vartheta}, \quad [\vec{n} \cdot \vec{E}]_y = e^{ikR \sin \varphi \sin \vartheta} \quad (I.37)$$

и при  $R \gg ka^2$

$$\begin{aligned} A_x^e &= \cos \vartheta \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{ik\rho [\sin \vartheta \sin \varphi - \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi)]} d\varphi, \\ A_y^m &= \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{ik\rho [\sin \vartheta \sin \varphi - \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi)]} d\varphi. \end{aligned} \quad (I.38)$$

Замечая, что

$$\int_0^{2\pi} e^{iz \cos \varphi} d\varphi = 2\pi J_0(z), \quad \int_0^a J_0(z\rho) d\rho = \frac{a}{z} J_1(za)$$

и вводя обозначения

$$\lambda = -\sin \vartheta \cos \varphi, \quad \mu = \sin \vartheta - \sin \vartheta \sin \varphi, \quad (I.39)$$

получим

$$A_x^e = a \cos \gamma \frac{e^{ikR}}{2kR} \Lambda, \quad A_y^m = a \frac{e^{ikR}}{2kR} \Lambda, \quad (I.40)$$

где

$$\Lambda = \frac{J_1(ka\sqrt{\lambda^2 + \mu^2})}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}. \quad (I.41)$$

Подставляя далее эти выражения в формулы (I.30), находим

$$\begin{aligned} E_\varphi = -H_\vartheta &= -\frac{ia}{2} (\cos \gamma + \cos \vartheta) \sin \varphi \Lambda \frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_\vartheta = H_\varphi &= \frac{ia}{2} (1 + \cos \gamma \cos \vartheta) \cos \varphi \Lambda \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \quad (I.42)$$

Исследуем полученные формулы. В направлении главного тенев  
вого лепестка (  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\vartheta = \gamma$  ) рассеянное поле равно

$$E_\vartheta = H_\varphi = 0; \quad E_\varphi = -H_\vartheta = -\frac{ika^2 \cos \gamma}{2} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (I.43)$$

и при  $ka \gg 1$  (I.43) совпадает с главным членом асимптотического  
разложения для поля, рассеянного идеально проводящим диском.

Из формул (I.42) легко также видеть, что в направлении  
зеркально отраженного луча (  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\vartheta = \pi - \gamma$  ) и в направлении  
на источник (  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\vartheta = \pi - \gamma$  ) поле, рассеянное черным диском,  
равно нулю. Можно показать, что в этих направлениях равно нулю

поле, рассеянное черной пластиной произвольной формы.

В плоскости падения ( $\varphi = \pm \pi/2$ ) рассеянное поле имеет вид

$$E_{\varphi} = -H_{\varphi} = -\frac{ia}{2}(\cos\gamma + \cos\vartheta)\sin\varphi \frac{J_1(\mu)}{\mu} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad E_{\vartheta} = H_{\vartheta} = 0, \quad (I.44)$$

а эффективная поверхность рассеяния определяется формулой

$$\sigma^e = \pi a^2 \left| (\cos\gamma + \cos\vartheta) \frac{J_1(\mu)}{\mu} \right|^2. \quad (I.45)$$

По этой формуле был проведен численный расчет при  $ka = 10$ . Значение угла  $\gamma$ , характеризующего направление падающей волны, было взято равным  $0^\circ$  и  $45^\circ$ . Результаты расчетов представлены на рис. I.8, I.9 сплошной линией. Там же для сравнения построены (в приближении физической оптики!) эффективные поверхности рассеяния  $\sigma_E^\circ$  и  $\sigma_H^\circ$  для идеально проводящего диска. Функция  $\sigma_E^\circ$  соответствует случаю Е-поляризации, а  $\sigma_H^\circ$  - случаю Н-поляризации падающей волны. За исключением области зеркально отраженного луча и направления на источник, функция  $\sigma^e$  качественно повторяет ход функций  $\sigma_{E,H}^\circ$ , приближаясь к ним вблизи теневого лепестка. Интересно, что в некоторых направлениях черный диск "светит" ярче металлического.

Заметим, наконец, что согласно теореме о теновом контуре, результаты, полученные здесь для черного диска, останутся в силе для произвольных черных тел с теновым контуром в виде окружности. Сюда, в частности, относятся черная сфера и черные тела вращения (при падении плоской волны вдоль их оси симметрии).

Более обстоятельное изложение теории дифракции на черных телах, а также результаты, относящиеся к полупрозрачным пластинам, можно найти в нашей статье [8].



В заключение напомним, что полученные нами результаты относятся к идеализированной модели поглощающего тела. При более точном подходе необходимо искать решение уравнений Максвелла с учетом реальных электромагнитных свойств тела.

### ЗАДАЧА

Доказать, что черные пластины произвольной формы не излучают в направлении зеркально отраженного луча.

**Решение.** Пусть на черную пластину  $S$  произвольной формы падает электромагнитная волна (I.28). Предположим далее, что пластина лежит в плоскости  $\tilde{x} = 0$ . Согласно формулам (I.29) и (I.10) векторный потенциал рассеянного поля имеет в дальней зоне компоненты.

$$A_x^e = \cos\vartheta \frac{e^{ikR}}{4\pi R} I(\varphi, \vartheta, \gamma),$$

$$A_y^m = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} I(\varphi, \vartheta, \gamma),$$

где

$$I(\varphi, \vartheta, \gamma) = \int_S e^{ik[\gamma \sin\gamma - \vartheta \sin\vartheta \cos(\varphi - \vartheta)]} dS$$

Подставляя эти выражения в формулы (I.30), получим

$$E_\varphi = -H_\vartheta = -\frac{ik}{4\pi} (\cos\gamma + \cos\vartheta) \sin\varphi I(\varphi, \vartheta, \gamma) \frac{e^{ikR}}{R},$$

$$E_\vartheta = H_\varphi = \frac{ik}{4\pi} (1 + \cos\gamma \cos\vartheta) \cos\varphi I(\varphi, \vartheta, \gamma) \frac{e^{ikR}}{R}.$$

Откуда

$$E_{\varphi, \vartheta} = H_{\varphi, \vartheta} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = +\frac{\pi}{2}, \vartheta = \pi - \gamma,$$

что и требовалось доказать.

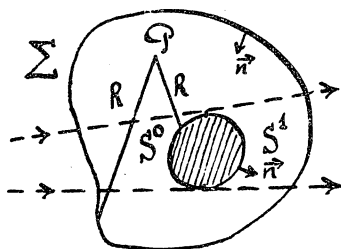


Рис. I.3.

К дифракции волн на черном теле,  
ограниченной поверхностью  $S^0 + S^1$ .

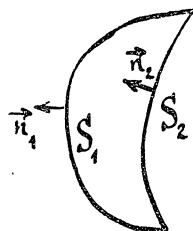


Рис. I.4. К теореме о  
теневого контуре.

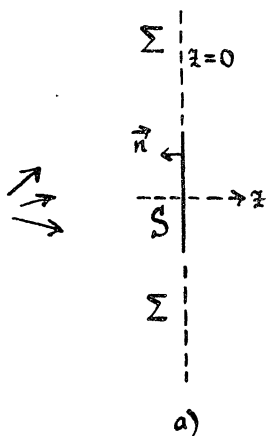
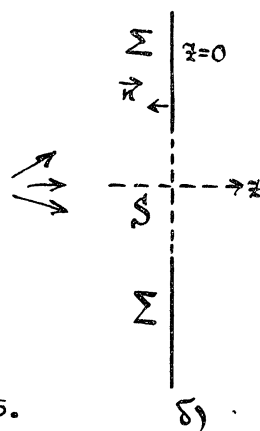


Рис. I.5.



К дифракции на дополнительных черных  
экранах.



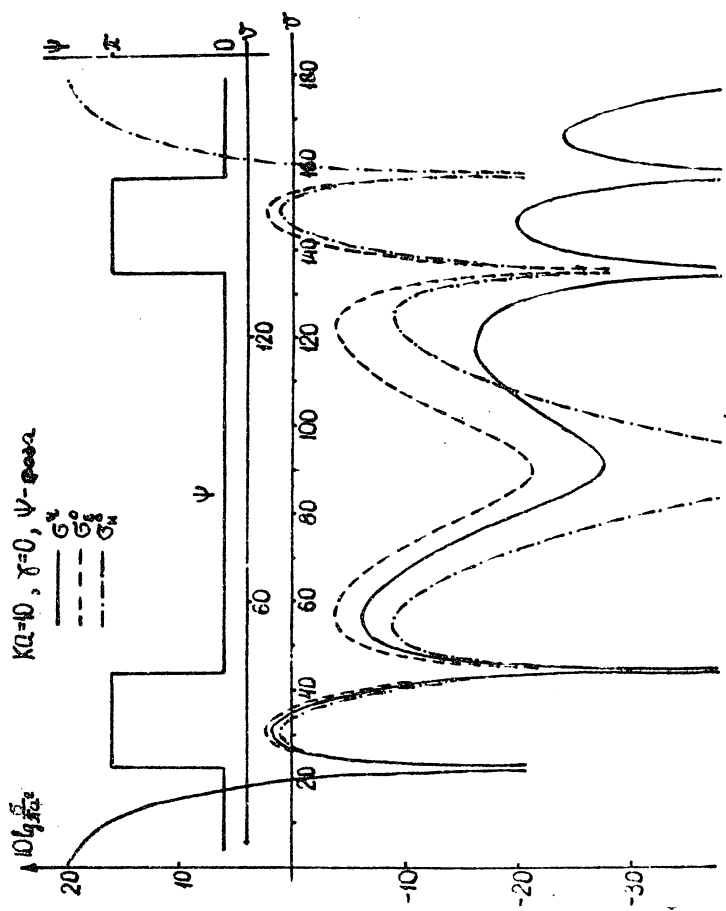


Рис. 1.8 Диаграммы рассеянного поля при дифракции плоской волны на черном диске.

(В верхней части рисунка построена фаза  $\psi$  поля  $iE_s e^{-ikr} \approx |A| e^{i\psi}$ , рассеянного черным диском.)

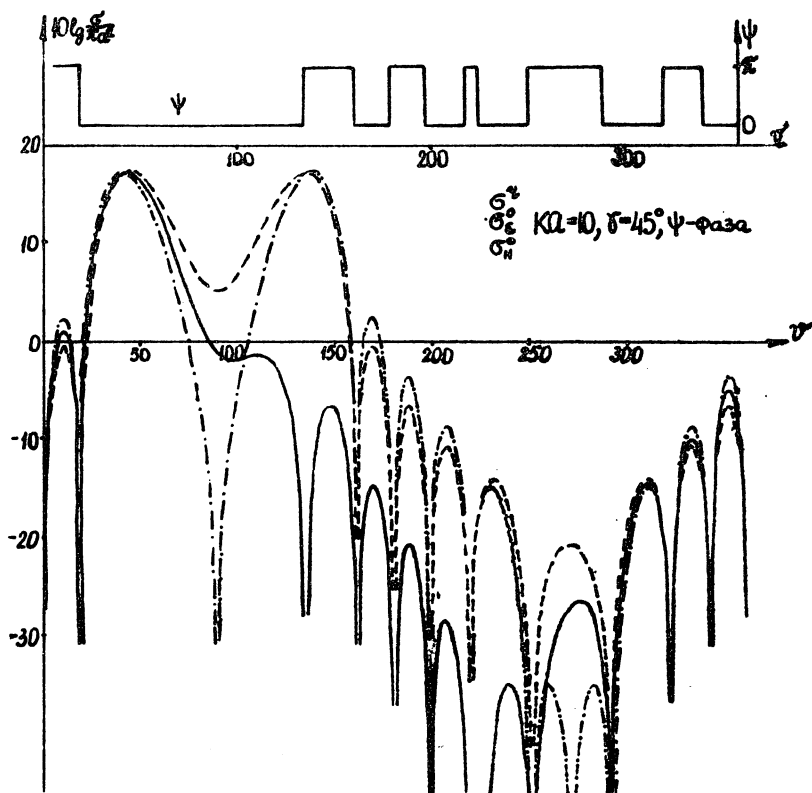


Рис. 1.9 Диаграммы рассеянного поля при дифракции плоской волны на черном диске. (В верхней части рисунка построена фаза поля  $iE_s e^{-ikR} = |A| e^{i\psi}$ , рассеянного черным диском.)

Литература

1. I-я Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн. Тексты лекций. Москва - Харьков, 1962.
2. П.Я. Уфимцев. Метод краевых волн в физической теории дифракции. Изд. "Сов.радио", М., 1962.
3. Х.Хёниль, А.Мауэ, К. Вестфаль. Теория дифракции. Перевод с немецкого. Изд-во "Мир", М., 1964.
4. Л.А. Вайнштейн. Электромагнитные волны. Изд. "Сов.радио", М., 1957.
5. В.В. Вакег, Е.Т. Copson. The mathematical theory of Huygen's principle. Oxford, 1939
6. F. Kottler. Elektromagnetische Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen. Ann. der Physik, 71, № 15, 457-508, 1923.
7. Л.Н. Захарьев, А.А. Леманский. Радиотехника и электроника, 14, № 11, 1969.
8. П.Я. Уфимцев. Известия вузов, Радиофизика, II, № 6, 912-931, 1968.

Метод краевых волн.

Метод краевых волн был развит в связи с исследованием дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих телах сложной формы, поверхность которых имеет изломы. Подробное изложение его дано в книге [1]. Здесь мы рассмотрим только основные положения этого метода и некоторые результаты его применения к конкретным задачам.

§ I. Разбиение поверхностного тока на "равномерную"  
и "неравномерную" части

Поле, рассеянное телом, может быть вычислено, если нам известны тангенциальные компоненты электрического ( $E_t$ ) и магнитного ( $H_t$ ) векторов на поверхности тела. Заметим, что на поверхности идеально проводящего тела  $E_t = 0$ , а величина  $H_t$  отлична от нуля и пропорциональна плотности поверхностного электрического тока. Поэтому для решения дифракционной задачи достаточно определить величину электрического тока, возбуждаемого на поверхности тела падающей волной.

Метод краевых волн исходит из представления плотности поверхностного тока в виде

$$\vec{j} = \vec{j}^0 + \vec{j}^1. \quad (2.01)$$

В абсолютной системе единиц величина  $\vec{j}^0$  равна

$$\vec{j}^0 = \begin{cases} \frac{c}{2\pi} [\vec{n} \times \vec{H}] & \text{на освещенной стороне тела,} \\ 0 & \text{на теневой стороне тела,} \end{cases} \quad (2.02)$$

где  $c$  - скорость света в вакууме,  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к поверхности тела,  $\vec{H}$  - магнитное поле падающей волны.

Формула (2.02) имеет следующее физическое содержание. Описываемый ею ток в каждой точке освещенной поверхности тела равен току, который возбуждается той же падающей волной на идеально проводящей плоскости, касательной к поверхности тела в рассматриваемой точке. Вычисляя с помощью запаздывающих потенциалов и уравнений Максвелла поле, создаваемое этим током, можно найти приближенные выражения для рассеянного поля. Такой способ решения дифракционных задач, называемый обычно приближением физической оптики, нашел широкое практическое применение, особенно для расчетов радиолокационных диаграмм рассеяния [1, 3, 4] .

Величина  $\vec{j}^1$  есть дополнительный ток, обусловленный искривлением поверхности. Под искривлением поверхности мы понимаем любое её отклонение от бесконечной плоскости (плавное искривление, излом, выступ, отверстие). Если тело является выпуклым и гладким, а его размеры и радиусы кривизны велики по сравнению с длиной волны, то дополнительный ток сосредоточен в основном вблизи границы между освещенной и теневой частями поверхности тела. Если же тело имеет края, изломы или острия, то дополнительный ток возникает также вблизи них. Плотность дополнительного тока сравнима с плотностью  $\vec{j}^0$ , как правило, лишь на расстояниях порядка длины волны от соответствующего края, излома или острия. Таким образом, если размеры тела значительно превышают длину волны, то дополнительные токи занимают сравнительно небольшую часть его поверхности.

Ток, возбуждаемый плоской волной на идеально проводящей плоскости, распределен по ней равномерно (его поверхностная плотность постоянна по величине), поэтому вектор  $\vec{j}^0$  можно назвать "равномерной" частью поверхностного тока. Дополнительный ток  $\vec{j}^1$ , обусловленный искривлением поверхности, будем называть "неравномерной" частью тока. Задача уточнения приближения физи-



ческой оптики заключается, следовательно, в том, чтобы найти вклад, вносимый "неравномерной" частью тока в полное рассеянное поле. Так как эта часть тока сосредоточена вблизи краев, то, очевидно, что излучаемое ею поле в дальней зоне будет иметь характер краевых волн.

Если ребра тела удалены друг от друга достаточно далеко, то неравномерную часть тока вблизи каждого ребра можно приближенно считать такой же, как на соответствующем бесконечном двугранном угле (клине). При более точном расчете нужно иметь в виду, что краевая волна, распространяясь вдоль поверхности тела, достигает соседнего ребра и испытывает на нем дифракцию, возбуждая вторичные краевые волны. Последние порождают в свою очередь новые краевые волны. В данной лекции мы ограничимся исследованием только первичных краевых волн.

## § 2. Дифракция на клине.

Ключевой задачей для метода краевых волн является классическая задача о дифракции плоской волны на клине. Строгое решение этой задачи впервые было дано Зоммерфельдом. Приближенные выражения для поля, рассеянного клином, можно найти интегрируя равномерную часть тока. Разность строгих и приближенных выражений определяет искомое поле от неравномерной части тока. При  $k\ell \gg 1$  это поле имеет характер краевых волн и определяется формулами

$$\begin{aligned} E_z &= E_{0z} \cdot f^1(\varphi, \varphi_0) \frac{e^{i(k\ell + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k\ell}}, \\ H_z &= H_{0z} \cdot g^1(\varphi, \varphi_0) \frac{e^{i(k\ell + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k\ell}}. \end{aligned} \quad (2.03)$$

На рис. 2.1. поясняется смысл величин  $\varphi, \varphi_0, \gamma$ . Функции  $f^1$  и  $g^1$  равны

$$f^1 = f - f^0, \quad g^1 = g - g^0, \quad (2.04)$$

где  $f, g$  есть угловые характеристики краевой волны в точном решении, а  $f^0, g^0$  - аналогичные величины в приближении физической оптики. Они определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{matrix} f \\ g \end{matrix} \right\} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left[ \left( \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n} \right)^{-1} + \left( \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n} \right)^{-1} \right], \quad (2.05)$$

$$n = \frac{1}{\pi},$$

$$f^0 = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \quad g^0 = - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}, \quad (2.06)$$

если освещена одна грань клина (т.е.  $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$ ), и

$$f^0 = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} + \frac{\sin(2\pi - \varphi_0)}{\cos(2\pi - \varphi) + \cos(2\pi - \varphi_0)}, \quad (2.07)$$

$$g^0 = - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} - \frac{\sin(2\pi - \varphi)}{\cos(2\pi - \varphi) + \cos(2\pi - \varphi_0)},$$

если освещены обе грани клина ( $2\pi - \pi < \varphi_0 < \pi$ ).

Отметим одно замечательное свойство функций  $f^1$  и  $g^1$ .

Рассеянное поле можно представить в виде суммы двух частей:

геометрооптической части, включающей в себя падающую и отраженную

плоские волны, и дифракционной. Оказывается, что вблизи границ

падающей и отраженной волн ( $\varphi = \pi \pm \varphi_0$ ,  $\varphi = 2\pi - \varphi_0 - \pi$ )

дифракционное поле имеет сложную структуру и не описывается

цилиндрическими волнами. Это обстоятельство проявляется в том,

что функции  $f, g$  и  $f^0, g^0$  испытывают на указанных

границах бесконечные разрывы. Функции же  $f^1$  и  $g^1$  остаются непрерывными и ограниченными на всем интервале  $0 \leq y \leq \alpha$ . Такое поведение этих функций легко объяснить: они являются диаграммами излучения токов, распределенных в конечной области пространства (вблизи ребра). Пользуясь функциями  $f^1$  и  $g^1$ , мы вычислим ниже поле, рассеянное телом конечных размеров.

### § 3. Отражение электромагнитных волн от тел вращения.

Определим величину поля, отраженного от выпуклого тела вращения, на поверхности которого имеется ребро. При этом мы ограничимся случаем, когда падающая на тело плоская электромагнитная волна

$$E_x = H_y = E_{ox} e^{ikz}, \quad E_y = H_x = 0 \quad (2.08)$$

распространяется вдоль его оси симметрии (рис. 2.2).

Согласно методу краевых волн отраженный сигнал ищется в виде суммы полей, излучаемых равномерной и неравномерной частями поверхностного тока.

#### а) Поле, излучаемое равномерной частью тока.

Пусть образующая поверхности вращения (рис. 2.3) задана уравнением

$$y = f(z), \quad 0 \leq z < l, \quad (2.09)$$

где  $f(z)$  — непрерывная функция с непрерывными производными. Причем  $f''(z) \leq 0$ , поскольку мы рассматриваем только такие поверхности, у которых освещенная часть является выпуклой.

Равномерная часть тока определяется формулой (2.02) и имеет компоненты

$$j_x = -\frac{c}{2\pi} E_{ox} \sin \beta e^{ikz}, \quad j_z = \frac{c}{2\pi} E_{ox} \cos \beta \cos \psi e^{ikz}, \quad j_y = 0, \quad (2.10)$$

Нас интересует поле, излучаемой этим током в отрицательном направлении оси  $z$  ( $\psi = \pi$ ). Оно описывается с помощью запаздывающего векторного потенциала

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \vec{j} \frac{e^{ikr}}{r} ds, \quad r = R + z,$$

и в дальней зоне, в точке  $z = -R$ , равно

$$E_x = -H_y = ikA_x, \quad E_{y,z} = H_{x,z} = 0, \quad (2.11)$$

где

$$A_x = E_{ox} \frac{l}{R} \int_0^l e^{2ikz} f(z) \sqrt{1 + f'^2(z)} \sin \beta dz. \quad (2.12)$$

Формулу (2.11) можно представить в виде

$$E_x = -H_y = E_{ox} \frac{e^{ikR}}{R} F, \quad (2.13)$$

где

$$F = ik \int_0^l e^{2ikz} \varphi(z) dz, \quad \varphi(z) = f(z) f'(z). \quad (2.14)$$

Интегрируя здесь по частям, получим асимптотическое разложение

$$F = -\frac{1}{2} \varphi(0) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(0)}{2(2ik)^n} + \frac{1}{2} \varphi(l) e^{2ikl} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(l)}{2(2ik)^n} e^{2ikl} \quad (2.15)$$

при  $kl \gg 1$ .

Известно, что на полубесконечном параболоиде вращения  
 (  $f(x) = \text{const} \sqrt{x}$  ) неравномерная часть тока равна нулю  
 [ 2 ], и, следовательно,  $F = -\frac{1}{2} \psi(0)$  есть в этом случае  
 точное выражение для характеристики рассеяния. В остальных случа-  
 ях равномерная часть тока описывает поверхностный ток с погрешно-  
 стью порядка  $k^{-1}$ , поэтому в формуле (2.15) имеет смысл удерживать только главные члены

$$F = -\frac{1}{2} [\psi(0) - \psi(l) e^{2ikl}]. \quad (2.16)$$

Слагаемые в (2.15) и (2.16), содержащие  $\psi^{(n)}(0)$ , соответствуют  
 волнам, уходящим от вершины тела, а слагаемые с  $\psi^{(n)}(l)$  - волнам  
 от кромки тела ( $x = l$ ).

Установим геометрический смысл величины  $\psi(0)$ .

С этой целью вычислим радиус кривизны кривой  $y = f(x)$ :

$$\rho(x) = \frac{[1 + f'(x)^2]^{3/2}}{f''(x)}.$$

Учитывая, что  $\psi(x) = f(x)f'(x)$ , это выражение можно  
 переписать в виде

$$\rho(x) = \frac{(f^2 + y^2)^{3/2}}{f^2 y' - y^2}. \quad (2.17)$$

Откуда в силу  $f(0) = 0$  получаем

$$\rho(0) = -\psi(0). \quad (2.18)$$

Таким образом, величина  $\psi(0)$  определяет радиус кривизны  
 поверхности вращения в её вершине ( $x = 0$ ).

Следовательно, поле, отраженное произвольной выпуклой поверхностью вращения с конечной кривизной в её вершине, будет приближенно равно

$$E_x = -H_y = \frac{1}{2} E_{0x} \left[ g(0) + g(l) e^{2ikl} \right] \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (2.19)$$

Мы нашли поле, создаваемое равномерной частью тока. Приступим теперь к вычислению поля, обусловленного неравномерной частью тока, которая сосредоточена вблизи ребра тела при  $x = l$ .

#### б) Поле, излучаемое неравномерной частью тока

Проведем касательные к образующей поверхности вращения слева и справа от ребра, т.е. при  $x = l-0$  и  $x = l+0$ . Продлевая их до пересечения с осью  $x$ , построим образующую вспомогательного тела, состоящего из двух конусов (рис. 2.4). Предположим далее, что радиус ребра велик по сравнению с длиной волны. В этом случае неравномерную часть тока вблизи кругового излома любой поверхности вращения можно приближенно считать такой же, как вблизи ребра построенного вспомогательного тела. Поле же, излучаемое этим током в направлении  $\vartheta = \pi$ , определяется формулами

$$E_x = -H_y = ikA_x, \quad E_y = H_x = ikA_y. \quad (2.20)$$

Поскольку неравномерная часть тока сосредоточена вблизи излома, можно приближенно положить

$$\vec{A} = \frac{a}{c} \frac{e}{z} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \int_1^{\infty} \vec{j}_1(\varphi, \xi) e^{-ik\xi \cos\omega} d\xi + \int_2^{\infty} \vec{j}_2(\varphi, \xi) e^{ik\xi \cos\omega} d\xi \right]. \quad (2.21)$$

Здесь  $z$  - расстояние от излома до точки наблюдения,  
 $\vec{j}_1(\varphi, \xi)$  - плотность

неравномерной части тока, текущего на освещенной стороне тела ( $z < l$ ),  $\vec{j}_2^1(\varphi, \xi)$  - плотность тока на теневой стороне ( $z > l$ ).

Обратимся далее к вспомогательной задаче о дифракции на клине, грани которого касательны к поверхности вращения при некотором азимуте  $\psi$  (рис. 2.5). Нас интересует поле в дальней зоне ( $z \gg ka^2$ ), излучаемое неравномерной частью тока в отрицательном направлении оси  $z$ . В местной цилиндрической системе координат  $r_1, \varphi_1, z_1$  оно равно

$$\begin{aligned} E_{z_1}(\varphi) &= -H_{\varphi_1}(\varphi) = ik A_{z_1}(\varphi), \\ H_{z_1}(\varphi) &= E_{\varphi_1}(\varphi) = ik A_{\varphi_1}(\varphi), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{k\tau_1}} \left[ \int_0^\infty \vec{j}_1^1(\varphi, \xi) e^{-ik\xi \cos\omega} d\xi + \int_0^\infty \vec{j}_2^1(\varphi, \xi) e^{ik\xi \cos\omega} d\xi \right]. \quad (2.23)$$

С другой стороны, согласно § 2 это поле может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} E_{z_1}(\varphi) &= E_{0z_1}(\varphi) f^1 \frac{e^{i(k\tau_1 + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k\tau_1}}, \\ H_{z_1}(\varphi) &= H_{0z_1}(\varphi) g^1 \frac{e^{i(k\tau_1 + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k\tau_1}}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где  $E_{0z_1}(\varphi), H_{0z_1}(\varphi)$  - значения амплитуды падающей волны на ребре клина.

Вводя обозначение

$$\vec{J} = \int_0^\infty \vec{j}_1^1(\varphi, \xi) e^{-ik\xi \cos\omega} d\xi + \int_0^\infty \vec{j}_2^1(\varphi, \xi) e^{ik\xi \cos\omega} d\xi \quad (2.25)$$

и приравнявая правые части соотношений (2.22), (2.24), находим

$$J_{z_1} = \frac{c E_{oz_1}(\varphi)}{ik2\pi} f^1, \quad J_{y_1} = \frac{c H_{oz_1}(\varphi)}{ik2\pi} g^1. \quad (2.26)$$

В исходной декартовой системе координат  $\vec{x}, y, z$  (и в интересующем нас направлении  $\varphi_1 = \omega$ ) вектор  $\vec{J}$  имеет компоненты

$$J_x = J_{z_1} \sin\varphi + J_{y_1} \cos\varphi, \quad J_y = -J_{z_1} \cos\varphi + J_{y_1} \sin\varphi. \quad (2.27)$$

Учитывая формулы (2.26), можно записать

$$J_x = \frac{c}{ik2\pi} [f^1 E_{oz_1}(\varphi) \sin\varphi + g^1 H_{oz_1}(\varphi) \cos\varphi], \quad (2.28)$$

$$J_y = -\frac{c}{ik2\pi} [f^1 E_{oz_1}(\varphi) \cos\varphi - g^1 H_{oz_1}(\varphi) \sin\varphi].$$

Отождествляя теперь неравномерную часть тока вблизи ребра конического тела с током на клине, можем подставить выражения (2.28) в формулу (2.21). В результате получим

$$A_x = \frac{a}{ik2\pi} \frac{e^{ikl}}{r} \int_0^{2\pi} [f^1 E_{oz_1}(\varphi) \sin\varphi + g^1 H_{oz_1}(\varphi) \cos\varphi] d\varphi, \quad (2.29)$$

$$A_y = -\frac{a}{ik2\pi} \frac{e^{ikl}}{r} \int_0^{2\pi} [f^1 E_{oz_1}(\varphi) \cos\varphi - g^1 H_{oz_1}(\varphi) \sin\varphi] d\varphi.$$

Заметим теперь, что согласно (2.08)

$$E_{oz_1}(\varphi) = E_{ox} \sin\varphi e^{ikl}, \quad H_{oz_1}(\varphi) = -E_{ox} \cos\varphi e^{ikl}. \quad (2.30)$$

Подставляя эти значения в выражения (2.29) и последние в формулы (2.20), находим искомое поле

$$E_x = -H_y = \frac{a E_{ox}}{2} (f^1 - g^1) \frac{e^{ikl}}{R} e^{2ikl}, \quad E_y = H_x = 0, \quad (2.31)$$



излучаемое неравномерной частью тока. С учетом формул

(2.04) - (2.07) оно может быть представлено в виде

$$E_x = -H_y = -\frac{a}{2} E_{ox} \left( \operatorname{tg} \omega + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} \right) \frac{e^{ikR}}{R} e^{2ikl}, \quad (2.32)$$

где

$$n = 1 + \frac{\omega + \Omega}{\pi}, \quad (2.33)$$

а  $\omega$  и  $\Omega$  - углы, показанные на рис. 2.3 и 2.4. В частном случае, когда поверхность вращения вырождается в диск ( $\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $\Omega \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ), величина этого поля обращается в нуль.

### в) Полное поле, отраженное телом.

Замечая, что в выражении (2.19)

$$\varphi(l) = a \operatorname{tg} \omega,$$

и суммируя поля (2.19) и (2.32), находим полное отраженное поле

$$E_x = -H_y = \frac{a}{2} E_{ox} \left[ \frac{\varphi(0)}{a} - \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{2ikl} \right] \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (2.34)$$

Следовательно, величина радиолокационного поперечника рассеяния в направлении  $\vartheta = \pi$  будет равна

$$\sigma = \pi a^2 \left| \frac{\varphi(0)}{a} - \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{2ikl} \right|^2. \quad (2.35)$$

Из этой формулы могут быть получены следующие интересные

результаты. Пусть например,

$$2kl = (2m+1)\frac{\pi}{2}, \quad m=0, 1, 2, \dots, \quad (2.36)$$

т.е.

$$l_{\lambda} = \frac{2m+1}{8} \quad (2.37)$$

Тогда

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_l, \quad (2.38)$$

где

$$\sigma_0 = \pi \varphi^2(0), \quad \sigma_l = \pi a^2 \left| \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} \right|^2 \quad (2.39)$$

обозначают соответственно эффективные поверхности рассеяния для вершины и основания тела. Причем

$$\max_{\omega=0} \sigma_l = \pi a^2, \quad 1 < n \leq 2, \quad (2.40)$$

$$\sigma_l \Big|_{n=2} = \frac{\pi a^2}{\cos^2 \omega}, \quad 0 \leq \omega < \frac{\pi}{2}. \quad (2.41)$$

Величины  $\sigma_0$  и  $\sigma_l$  определяют границы эффективной поверхности рассеяния для любого гладкого тела с ребром у основания ( $z=l$ ), а именно :

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= (\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{\sigma_l})^2, \\ \sigma_{\min} &= (\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{\sigma_l})^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Откуда, в частности,

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \pi (a + |\varphi(0)|)^2 \\ \sigma_{\min} &= \pi (a - |\varphi(0)|)^2 \end{aligned} \quad \text{при } \omega=0, \quad 1 < n \leq 2 \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \pi \left( \frac{a}{\cos \omega} + |g(0)| \right)^2 \\ \sigma_{\min} &= \pi \left( \frac{a}{\cos \omega} - |g(0)| \right)^2 \end{aligned} \quad \text{при } n=2, 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.44)$$

Заметим, что значение параметра  $n = 2$  соответствует случаю, когда внешний угол кромки основания равен  $2\pi$ . Иными словами, в этом случае тело имеет форму воронки. Существенно также, что оценки (2.42) - (2.44) не зависят от длины падающей волны; важно только, чтобы выполнялось условие  $ka \gg 1$ .

### г) Пример

Вычислим эффективную поверхность рассеяния параболоида вращения, образующая которого описывается уравнением

$$y^2 = 2px, \quad 0 < x < l,$$

а основание имеет коническую форму. Геометрические параметры параболоида:  $a$  - радиус основания,  $l = \frac{a^2}{2p}$  - длина,  $\omega$  - угол между касательной к параболе в точке  $x=l$  и осью  $x$ ; причем  $\operatorname{tg} \omega = p/a$ . Функция  $\varphi(x) = yy'$ , через которую определяется рассеянное поле, в данном случае есть константа

$$\varphi(x) = p = -\rho(0) = a \operatorname{tg} \omega. \quad (2.45)$$

Поэтому согласно формулам (2.19) и (2.34) поле, излучаемое равномерной частью тока, равно

$$E_x = -H_y = -\frac{a}{2} E_{ox} (1 - e^{2ikl}) \operatorname{tg} \omega \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (2.46)$$

а полное поле -

$$E_x = -H_y = -\frac{a}{2} E_{ox} \left( \operatorname{tg} \omega + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{2ikl} \right) \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (2.47)$$

Соответствующие этим двум выражениям значения эффективной поверхности рассеяния будут определяться формулами

$$\sigma_0 = \pi a^2 t_g \omega \cdot |1 - e^{2ikl}|^2 \quad (2.48)$$

и

$$\sigma = \pi a^2 |t_g \omega + \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{2ikl}|^2 \quad (2.49)$$

Мы видим, что обе функции осциллируют при изменении параметра  $kl$ . При этом для значений  $kl = m\pi$  ( $m=1, 2, 3, \dots$ ) функция  $\sigma_0$  имеет нули, а функция  $\sigma$  - минимумы ( $\sigma_{\min} > 0$ ). Кроме того, функция  $\sigma$  существенно зависит от формы теневой части тела. Так, например, численные расчеты для параболоида с параметрами  $ka = 2\pi$ ,  $kl = 10\pi$ ,  $t_g \omega = 0,1$  ( $k = \pi$ ) показывают, что величина отраженного сигнала возрастает на 44 дБ при увеличении угла  $\Omega$  (рис. 2.6).

Другие примеры решения дифракционных задач с помощью изложенного метода содержатся в книге [1]. Там же показано, что неравномерная часть тока есть не только вспомогательное понятие, удобное для решения задач дифракции, но является реально существующей физической величиной. Поле, излучаемое ею, может быть измерено экспериментальным путем.

В заключение напомним, что метод краевых волн применим для исследования диаграмм рассеяния в коротковолновом диапазоне. Сравнение с экспериментом и строгой теорией показывает, что он дает разумные результаты уже в случае, когда линейные размеры тела имеют величину порядка полутора-двух длин волны [1].

### Задачи

I. Определить величину поля, отраженного от конечного

конуса, предполагая, что он возбуждается плоской волной (2.08), а координатная ось  $z$  является осью симметрии тела (см.рис.2.4).

**Р е ш е н и е.** Поле, излучаемое равномерной частью тока, определяется формулами (2.13) и (2.15). Функция  $\varphi(z)$  в рассматриваемой задаче равна

$$\varphi(z) = z t_g^2 \omega.$$

Ограничиваясь в формуле (2.15) величинами порядка  $k^{-1}$  и подставляя их в (2.13), получим

$$\begin{aligned} E_x = -H_y = & -E_{ox} \frac{i}{4k} t_g^2 \omega \frac{e^{ikR}}{R} + \\ & + E_{ox} \left( \frac{i}{4k} t_g^2 \omega + \frac{a}{2} t_g \omega \right) \frac{e^{ikR}}{R} e^{2ikl} \end{aligned} \quad (a)$$

Суммируя это поле с полем (2.32), излучаемым неравномерной частью тока, находим решение поставленной задачи

$$\begin{aligned} E_x = -H_y = & -E_{ox} \left[ \frac{i}{2} (1 - e^{2ikl}) t_g^2 \omega + \right. \\ & \left. + ka \frac{\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\omega}{n}} e^{2ikl} \right] \frac{e^{ikR}}{2kR} \end{aligned} \quad (б)$$

Убедитесь, что функции (а) и (б) остаются ограниченными при  $\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}, l \rightarrow 0$ , когда передняя часть конуса деформируется в диск.

2. Показать, что в приближении физической оптики отраженное поле не испытывает деполяризации.

**Р е ш е н и е.** Пусть в свободном пространстве находится выпуклое идеально проводящее тело произвольной формы. Падающую на него плоскую электромагнитную волну представим в виде

$$\begin{pmatrix} E_x \\ H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{ox} \\ H_{ox} \end{pmatrix} e^{ik(z \cos \gamma + y \sin \gamma)}$$

Остальные компоненты векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  определяются через  $E_x, H_x$  с помощью уравнений Максвелла. Назовем коэффициентом поляризации волны отношение

$$\left| \frac{E_x}{H_x} \right| = \rho$$

и вычислим его величину для волны, отраженной в направлении на источник. Определим это направление в сферической системе координат  $\theta, \varphi, \psi$ , положив  $\vartheta = \pi - \psi$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

Отраженное поле в приближении физической оптики есть поле, излучаемое равномерной частью тока. Согласно определению (2.02) равномерная часть тока, возбуждаемая на поверхности  $S$  тела при  $E$ -поляризации падающей волны ( $\vec{E}_0 \perp yoz$ ), равна

$$j_x^0 = -\frac{c}{2\pi} E_{0x} (n_y \sin \psi + n_z \cos \psi) e^{i\psi},$$

$$j_y^0 = \frac{c}{2\pi} E_{0x} n_x \sin \psi e^{i\psi},$$

$$j_z^0 = \frac{c}{2\pi} E_{0x} n_x \cos \psi e^{i\psi},$$

а при  $H$ -поляризации ( $\vec{H}_0 \perp yoz$ ) -

$$j_x^0 = 0, j_y^0 = \frac{c}{2\pi} H_{0x} n_z e^{i\psi}, j_z^0 = -\frac{c}{2\pi} H_{0x} n_y e^{i\psi}.$$

Здесь  $\psi = k(y' \sin \psi + z' \cos \psi)$  - фаза падающей волны в точке  $(x', y', z')$  на поверхности тела;  $n_x, n_y, n_z$  - компоненты внешней нормали к поверхности в той же точке.

Вычисляя далее по этому току вектор-потенциал в дальней зоне и подставляя его значение в формулы

$$E_y = -H_z = ikA_y, \quad E_z = H_y = ikA_z,$$

найдем рассеянное поле. При  $E$  - поляризации оно равно

$$E_y = -H_z = \frac{ik}{2\pi} E_{ox} \frac{e^{ikR}}{R} \int_S [n_x \sin\gamma \cos\varphi + (n_y \sin\gamma + n_z \cos\gamma) \sin\varphi] e^{i\Phi} ds,$$

$$E_z = H_y = \frac{ik}{2\pi} E_{ox} \int_S [n_x (\sin\gamma \cos\varphi \sin\varphi - \cos\gamma \sin\varphi) - (n_y \sin\gamma + n_z \cos\gamma) \cos\varphi \cos\varphi] e^{i\Phi} ds \frac{e^{ikR}}{R},$$

а при  $H$  - поляризации -

$$E_y = -H_z = \frac{ik}{2\pi} H_{ox} \cos\varphi \frac{e^{ikR}}{R} \int_S n_z e^{i\Phi} ds,$$

$$E_z = H_y = \frac{ik}{2\pi} H_{ox} \frac{e^{ikR}}{R} \int_S (n_y \sin\varphi + n_z \sin\varphi \cos\varphi) e^{i\Phi} ds$$

В этих формулах интегрирование осуществляется по освещенным элементам поверхности тела;  $\Phi = \psi - k\tau' \cos\Omega$ ,

где  $\tau' = \tau'(x', y', z')$ , а  $\Omega$  - угол между направлениями в точку интегрирования и в точку наблюдения. Полагая здесь  $\vartheta = \pi - \gamma$   $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , находим отраженное поле в направлении на источник (радиолокационное направление)

$$E_x = -H_z = -\frac{ik}{2\pi} E_{ox} \frac{e^{ikR}}{R} \int_S (n_y \sin\gamma + n_z \cos\gamma) e^{i\Phi} ds, \quad (a)$$

$$E_z = H_x = 0$$

при  $E$  - поляризации и

$$E_y = H_x = \frac{ik}{2\pi} H_{0x} \frac{e^{ikR}}{R} \int_S (n_y \sin \gamma + n_z \cos \gamma) e^{i\phi} ds, \quad (6)$$

$$E_x = H_y = 0$$

при  $H$  - поляризации.

Вычисляя с помощью соотношений (а) и (б) коэффициент поляризации отраженной волны, мы получаем для него ту же величину

$$\rho = \left| \frac{E_{0x}}{H_{0x}} \right|,$$

что и в падающей волне. Иными словами, в приближении физической оптики плоскость поляризации, в которой лежит вектор  $\vec{E}$ , не изменяет своего положения в пространстве при отражении от выпуклого тела произвольной формы.



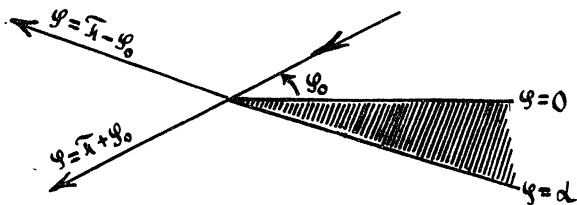


Рис. 2.1. К дифракции на клине (Луч  $\varphi = \pi + \varphi_0$  расположен на геометрической границе света и тени; луч  $\varphi = \pi - \varphi_0$  - на границе отраженной волны)

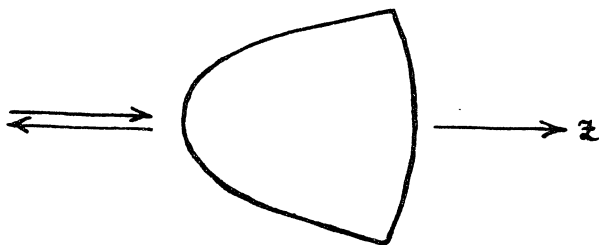


Рис. 2.2. К дифракции на телах вращения.

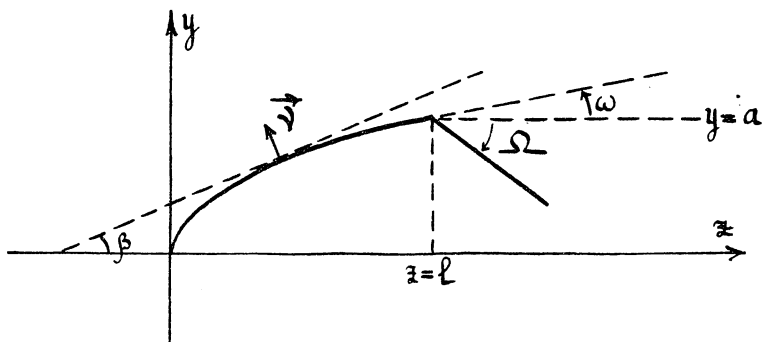


Рис. 2.3. Образующая поверхности вращения:  $\vec{\omega}$  - внешняя нормаль;  $\beta$  - угол наклона касательной.

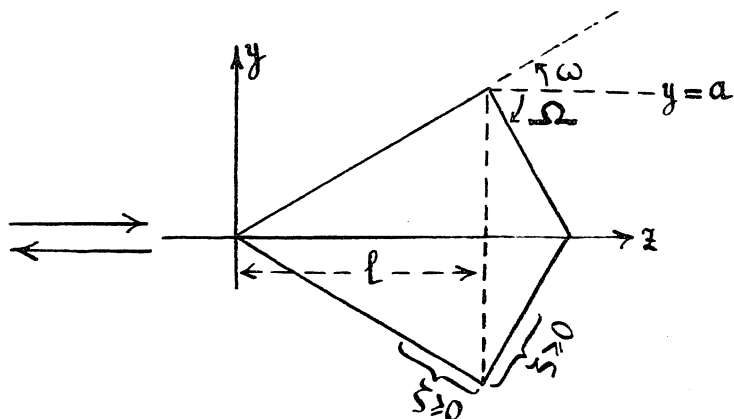


Рис. 2.4. Сечение конуса плоскостью  $y=a$ .

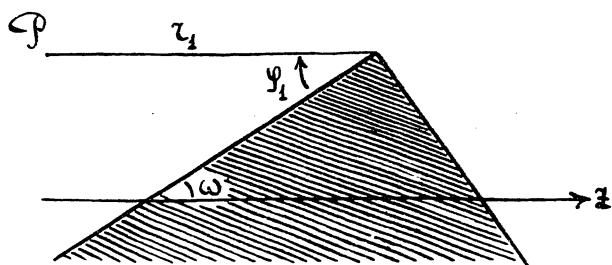


Рис. 2.5. Двугранный угол, соответствующий излому конической поверхности.

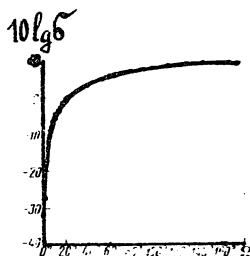


Рис. 2.6.

Зависимость эффективной поверхности рассеяния  
конечного параболоида от формы теневой части.  
(параметры параболоида:  $\kappa a = 2\pi$ ,  $\kappa l = 10\pi$ ,  
 $t_{g\omega} = 0,1$ . Приближение физической оптики  
дает в этом случае величину  $\tilde{\sigma}_0 = 0$ .)

Литература

1. П.Я. Уфимцев. Метод краевых волн в физической теории дифракции. Изд. "Сов.радио", М., 1962.

2. C. E. Schensted. J. Appl. Phys. , 26, № 3, 306-308, 1955.

3. Дж. Р. Менцер. Дифракция и рассеяние радиоволн. Изд. "Сов.радио", М., 1958. (Перевод с англ.)

4. А.И. Потехин. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн Изд. "Сов.радио", М., 1948.

### Лекция 3

#### Дифракция цилиндрической волны и гауссова пучка на клине

Строгое решение задачи о дифракции на клине было получено Зоммерфельдом на рубеже XIX и XX вв. и до сих пор имеет большое значение в теории дифракции. Во-первых, потому, что это простое, но вместе с тем строгое решение. Во-вторых, оно лежит в основе многих приближенных методов расчета дифракционных полей для широкого класса реальных тел, на поверхности которых имеются плоские грани и ребра. В третьих (как выяснилось недавно), оно дает возможность достаточно просто изучить дифракцию на клине тех пучков, которые выходят из квазиоптических устройств: открытых резонаторов и волноводов.

#### § 1. Дифракция цилиндрической волны на клине (строгое решение в виде контурного интеграла)

Мы не будем заниматься здесь выводом строгого решения, а приведем это решение без вывода и только убедимся в его справедливости. Итак, пусть на клин падает цилиндрическая волна

$$u = H_0^{(1)}(kR), \quad R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (3.01)$$

создаваемая линейным источником с координатами  $r_0, \varphi_0$  (рис.2.1). Полное поле, возбуждаемое вне клине, определяется выражением

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{4\pi i n} \int_C H_0^{(1)}(kR(\beta)) \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi - \beta - \varphi + \varphi_0}{2n} + \operatorname{ctg} \frac{\pi - \beta - \varphi - \varphi_0}{2n} \right) d\beta, \quad (3.02)$$

где

$$R(\rho) = (r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos \beta)^{1/2}, \quad n = \frac{\alpha}{\pi}, \quad (3.03)$$

$\alpha$  - внешний угол клина,  $C = C_1 + C_2$  - контур интегрирования, показанный на рис. 3.1. Верхний знак в квадратных скобках относится к условию

$$u = 0, \quad (3.04)$$

а нижний - к условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.05)$$

на поверхности клина.

Переходя в формуле (3.02) к новой переменной интегрирования  $\zeta = \beta + \varphi$ , убеждаемся, что функция  $u(r, \varphi)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Нетрудно проверить непосредственной проверкой, что она удовлетворяет граничным условиям при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \alpha$ . Из формулы (3.07), приведенной ниже, следует, что  $u(r, \varphi)$  имеет правильную особенность при  $R \rightarrow 0$ . Таким образом, функция (3.02) является строгим решением задачи о дифракции на клине.

Представим это решение в виде, более удобном для физической интерпретации. Перейдем для этого в формуле (3.02) к интегралу по контуру  $D + E$  (рис. 3.1). Учитывая существование полюсов

$$\beta_m = \pm 2m\alpha + \pi - \varphi \pm \varphi_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

у подынтегральной функции, с помощью теоремы вычетов получаем

$$u = u_q + u_d, \quad (3.06)$$

где  $u_g$  - геометрикооптическая, а  $u_d$  - дифракционная часть поля.

Причем

$$u_g = \sum_{m_1} H_0^{(1)}[kR(\beta_{m_1})] \mp \sum_{m_2} H_0^{(1)}[kR(\beta_{m_2})], \quad (3.07)$$

а индексы суммирования принимают целочисленные значения, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} |\varphi - \varphi_0 \pm 2m_1\alpha| &< \pi, \\ |\varphi + \varphi_0 \pm 2m_2\alpha| &< \pi. \end{aligned} \quad (3.08)$$

Геометрооптическое поле (3.07) приобретает особенно простую и наглядную форму, если рассмотреть случай, когда внешний угол клина  $\alpha > \pi$ . При этом возможны две ситуации в зависимости от того, освещает ли падающая волна одну или обе грани клина. Оказывается, что

$$u_g = \begin{cases} H_0^{(1)}(kR) \mp H_0^{(1)}(kR_1) & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0, \\ H_0^{(1)}(kR) & \text{при } \pi - \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi + \varphi_0, \\ 0 & \text{при } \pi + \varphi_0 \leq \varphi \leq \alpha, \end{cases} \quad (3.09)$$

если освещена одна грань клина ( $\varphi_0 < \alpha - \pi$ ), и

$$u_g = \begin{cases} H_0^{(1)}(kR) \mp H_0^{(1)}(kR_1) & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0, \\ H_0^{(1)}(kR) & \text{при } \pi - \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\alpha - \pi - \varphi_0, \\ H_0^{(1)}(kR) \mp H_0^{(1)}(kR_2) & \text{при } 2\alpha - \pi - \varphi_0 \leq \varphi \leq \alpha, \end{cases} \quad (3.10)$$

если освещены обе грани клина ( $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$ ).

Здесь  $R$  - расстояние до точки наблюдения от источника,  $R_1$  - расстояние от его зеркального изображения в грани  $\varphi = 0$ ,  $R_2$  - расстояние от зеркального изображения источника во второй грани клина ( $\varphi = \alpha$ ); причем

$$\begin{aligned} R &= [\tau^2 + \tau_0^2 - 2\tau\tau_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/2}, \\ R_1 &= [\tau^2 + \tau_0^2 - 2\tau\tau_0 \cos(\varphi + \varphi_0)]^{1/2}, \\ R_2 &= [\tau^2 + \tau_0^2 - 2\tau\tau_0 \cos(2\alpha - \varphi - \varphi_0)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Очевидно, что поля зеркальных источников не имеют особенности вблизи реального источника ( $\tau \approx \tau_0$ ,  $\varphi \approx \varphi_0$ ): их особенности находятся в нефизическом пространстве. Как мы увидим ниже, поле

$u_d$  тоже не имеет особенностей, поэтому особенность функции  $u(\tau, \varphi)$  оказывается такой же, как у внешнего поля (3.01).

Дифракционная часть поля равна сумме интегралов по контурам  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{E}$ . Подстановкой  $\beta = \beta' + 2\pi$  интеграл по контуру  $\mathcal{E}$  преобразуется в интеграл по контуру  $\mathcal{D}$ . В результате, записывая  $\beta$  вместо  $\beta'$ , имеем

$$u_d = \frac{1}{4\pi i n} \int_{\mathcal{D}} H_0^{(1)}(kR(\beta)) \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi - \beta - \varphi + \varphi_0}{2n} + \operatorname{ctg} \frac{\pi + \beta + \varphi - \varphi_0}{2n} + \right. \\ \left. + \operatorname{ctg} \frac{\pi - \beta - \varphi - \varphi_0}{2n} + \operatorname{ctg} \frac{\pi + \beta + \varphi + \varphi_0}{2n} \right) d\beta.$$

Тождество

$$\operatorname{ctg} \frac{x+\tau}{2n} + \operatorname{ctg} \frac{x-\tau}{2n} = \frac{2 \sin \frac{x}{n}}{\cos \frac{\tau}{n} - \cos \frac{x}{n}}$$

позволяет записать функцию  $u_d$  более кратко

$$u_d = \frac{i \sin \frac{\pi}{n}}{2\pi n} \int_{\mathcal{D}} H_0^{(1)}(kR(\beta)) \left\{ \left( \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\beta + \varphi - \varphi_0}{n} \right)^{-1} + \left( \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\beta + \varphi + \varphi_0}{n} \right)^{-1} \right\} d\beta. \quad (3.12)$$

Отсюда, между прочим, сразу же вытекает один интересный физический результат. Для значений

$$\alpha = \frac{\pi}{m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.13)$$



имеем  $\sin \frac{\pi}{n} = \sin \frac{\pi^2}{\alpha} = 0$  и, следовательно, дифракционная часть поля равна нулю. Другими словами, в этом случае геометрикооптическое выражение (3.07) дает нам строгое решение задачи: оно имеет правильную особенность при  $\gamma = \gamma_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ , удовлетворяет граничным условиям и удовлетворяет уравнению Гельмгольца во всем пространстве ( $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ). При других значениях угла  $\alpha$  ( $\alpha \neq \frac{\pi}{m}$ ) геометрикооптическое выражение по-прежнему обладает двумя первыми из перечисленных свойств, но теряет последнее. Оно, как это видно, например, из формул (3.09) и (3.10), имеет разрывы и, следовательно, уже не является решением уравнения Гельмгольца во всем пространстве  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ . Именно поэтому необходима дифракционная часть поля, которая компенсирует разрывы, содержащиеся в геометрикооптическом поле.

Рассмотренное решение задачи о дифракции цилиндрической волны на клине имеет много общих черт с решениями аналогичных задач для плоской и сферической волн. В этом можно убедиться, обратившись к задаче для данной лекции, где приведены указанные решения.

## § 2. Асимптотическое представление дифракционного поля

Нас интересует случай, когда источник и точка наблюдения находятся далеко от ребра клина:

$$\frac{\kappa r_0}{r} \gg 1.$$

При этом условии функцию Ханкеля в формуле (3.12) можно заменить первым членом ее асимптотического разложения

$$H_0^{(1)}(\kappa R) = \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{i(\kappa R - \pi/4)}.$$

Тогда

$$u_d = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n\pi\sqrt{2\pi k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\mathcal{D}} \frac{e^{ikR(\beta)}}{\sqrt{R(\beta)}} \left[ \left( \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\beta + \varphi - \varphi_0}{n} \right)^{-1} \mp \left( \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\beta + \varphi + \varphi_0}{n} \right)^{-1} \right] d\beta. \quad (3.20)$$

Вычислим этот интеграл приближенно с помощью метода перевала.

Из условия

$$\frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} = 0$$

находим точку перевала -  $\beta = 0$ . Основной вклад в интеграл дает участок контура вблизи точки перевала, где

$$R(\beta) \approx r + r_0 - \varrho(1 - \cos \beta), \quad \varrho = \frac{r r_0}{r + r_0}. \quad (3.21)$$

Поэтому приближенно можно положить

$$u_d = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\pi n} \frac{e^{ik(r+r_0)}}{\sqrt{2\pi k(r+r_0)}} e^{i\frac{\pi}{4}} \times \quad (3.22)$$

$$\times \int_{\mathcal{D}} e^{-ik\varrho(1-\cos\beta)} \left[ \left( \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\beta + \varphi - \varphi_0}{n} \right)^{-1} \mp \left( \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\beta + \varphi + \varphi_0}{n} \right)^{-1} \right] d\beta.$$

Переходя к переменной интегрирования

$$s = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\beta}{2}, \quad s^2 = i(1 - \cos \beta), \quad (3.23)$$

перепишем предыдущее выражение в виде

$$u_d = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\pi n} \left[ w(\varrho, \varphi - \varphi_0) \mp w(\varrho, \varphi + \varphi_0) \right] \frac{e^{ik(r+r_0)}}{\sqrt{\pi k(r+r_0)}}, \quad (3.24)$$

где

$$w(\varrho, \chi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\varrho s^2} \left[ \left( \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\chi + \beta}{n} \right) \cos \frac{\beta}{2} \right]^{-1} ds. \quad (3.25)$$

Предположим, что точка наблюдения находится вдали от границ падающей и отраженной волн. Тогда подынтегральное выражение, заключенное в квадратные скобки, можно разложить в ряд Тейлора по степеням  $\xi$ . Ограничиваясь в нем первым членом, получим

$$w(\rho, \chi) = \sqrt{\frac{\pi}{k\rho}} (\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\chi}{n})^{-1} \quad (3.26)$$

и

$$u_d = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\pi n} \left[ (\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n})^{-1} + (\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n})^{-1} \right] e^{\frac{i k (\chi + \tau_0)}{\sqrt{k\tau} \sqrt{k\tau_0}}} \quad (3.27)$$

Таким образом, в рассматриваемой области дифракционное поле является цилиндрической волной, расходящейся от ребра клина (краевая волна). Представим её в несколько ином виде

$$u_d = u_0 \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left[ (\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n})^{-1} + (\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n})^{-1} \right] e^{\frac{i (k\tau + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2\pi k\tau}}} \quad (3.28)$$

где

$$u_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi k\tau_0}} e^{i(k\tau_0 - \frac{\pi}{4})}.$$

Оказывается, что эта формула справедлива также и в случае дифракции на клине плоской волны [1], если под  $u_0$  понимать поле падающей плоской волны на ребре клина. Именно это выражение было использовано нами во 2-й лекции (см. формулу (2.05)) при изложении метода краевых волн. Кроме того, тот факт, что в первом приближении цилиндрическая волна дифрагирует на ребре клина так же, как плоская, положен в основу геометрической теории дифракции, которой посвящен специальный курс в данной школе.

Полученное выражение (3.18) неприменимо вблизи границы тени ( $\varphi = \pi + \varphi_0$ ) и вблизи зеркально отраженных лучей ( $\varphi = \pi - \varphi_0$ ,  $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$ ), так как в этом случае полюсы подынтегральной функции в (3.15) близки к точке перевала ( $s = 0$ ) и, следовательно, её разложение в ряд Тейлора теряет смысл. Физически этот результат означает, что в указанной области дифракционное поле не сводится к краевым цилиндрическим волнам, а имеет более сложный характер.

Асимптотическое представление функции  $w(\varphi, \chi)$  для этой области мы найдем, используя прием, предложенный Паули [2]. Умножим и разделим подынтегральное выражение в (3.25) на величину

$$\cos \chi + \cos \beta = i(s^2 - is_0^2), \quad s_0^2 = 2 \cos^2 \frac{\chi}{2} \quad (3.29)$$

и разложим в ряд Тейлора функцию

$$\frac{\cos \chi + \cos \beta}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\chi + \beta}{n}},$$

которая уже не имеет полюса в точке перевала ( $s = 0$ ) при  $\chi = \pi$ . Ограничиваясь первым членом ряда, имеем

$$w(\varphi, \chi) = \frac{2}{i} \frac{\cos \chi + 1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\chi}{n}} \int_0^{\infty} e^{-k\varphi s^2} \frac{ds}{s^2 - is_0^2}. \quad (3.30)$$

Заметим, что

$$\int_0^{\infty} e^{-k\varphi s^2} \frac{ds}{s^2 - is_0^2} = e^{-ik\varphi s_0^2} \int_0^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s^2 - is_0^2)t} dt.$$

Меняя здесь порядок интегрирования, находим

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-kgs^2} ds}{s^2 - is_0^2} = e^{-ikgs_0^2} \int_{kgs_0^2}^{\infty} \frac{is_0^2 t}{\sqrt{t}} \frac{dt}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{|s_0|} e^{-ikgs_0^2} \int_{\sqrt{kgs_0^2}}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{kgs_0^2}} dt$$

и

$$w(\varrho, \chi) = i2\sqrt{2\pi} \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\chi}{n}} e^{-ikgs_0^2} \int_{\infty \cos \frac{\chi}{2}}^{\sqrt{2kgs_0^2} \cos \frac{\chi}{2}} e^{-it^2} dt \quad (3.31)$$

Это выражение является аналогом формулы Паули для задачи дифракции цилиндрической волны на клине. Действительно, заменяя здесь  $\varrho$  на  $\chi$ , мы получим известную формулу Паули [2], определяющую поле при дифракции плоской волны на клине.

Более полное асимптотическое исследование данной задачи содержится в работе Тужилина [3]. Здесь мы только отметим, что следующий член асимптотического разложения для функции  $w(\varrho, \chi)$  имеет величину, порядок которой зависит от точки наблюдения: вблизи геометрикооптических границ ( $\chi = \pi$ ) он порядка  $\frac{1}{\sqrt{kgs_0^2}}$ , а вдали от них - порядка  $\frac{1}{kgs_0^2}$  по сравнению с выписанным членом (3.31).

В заключение параграфа обратим внимание на следующее обстоятельство. Нижний предел интеграла Френеля в формуле (3.31) по абсолютной величине всегда равен бесконечности, а его знак определяется знаком  $\cos \frac{\chi}{2}$ . Поэтому при переходе через границу  $\chi = \pi$  нижний предел меняет знак и интеграл Френеля испытывает конечный разрыв, обеспечивая непрерывность полного поля на этой границе. Действительно, с помощью формулы

$$\int_0^{\infty} e^{it^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

нетрудно показать, что

$$w(\varphi, \pi \pm 0) = \mp i \frac{n\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

и

$$\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\pi n} w(\varphi, \pi + 0) \frac{e^{ik(\tau + \tau_0)}}{\sqrt{\pi k(\tau + \tau_0)}} = \frac{e^{ik(\tau + \tau_0) - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k(\tau + \tau_0)}} \sim \frac{1}{2} H_0^{(1)}[k(\tau + \tau_0)],$$

$$\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\pi n} w(\varphi, \pi - 0) \frac{e^{ik(\tau + \tau_0)}}{\sqrt{\pi k(\tau + \tau_0)}} + H_0^{(1)}[k(\tau + \tau_0)] \sim \frac{1}{2} H_0^{(1)}[k(\tau + \tau_0)],$$

т.е. полное поле на границе тени и на границах зеркально отраженных лучей асимптотически равно половине геометрико-оптического поля.

### § 3. Дифракция гауссова пучка на клине

В этом параграфе мы применим полученные выше результаты к изучению дифракции волновых пучков на клине. Данная задача представляет интерес в связи с тем, что волновые пучки являются собственными типами колебаний в квазиоптических системах - открытых волноводных линиях и открытых резонаторах, где энергетические потери связаны с дифракцией на кромках линз и зеркал.

Решение поставленной задачи можно найти элементарным путем, если обратить внимание на следующее интересное обстоятельство. Пусть на оси  $z$  декартовой системы координат расположен источник, излучающий цилиндрическую волну

$$u = \frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{k\tau}}, \quad \tau = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.40)$$

Предположим, что координаты источника становятся комплексными

$$x = 0 + i\delta \cos \psi, \quad y = 0 + i\delta \sin \psi, \quad \delta \geq 0. \quad (3.41)$$

Тогда формула (3.40) преобразуется к виду

$$u = \frac{e^{ik\tilde{\tau}}}{\sqrt{k\tilde{\tau}}}, \quad \tilde{\tau} = [(x - i\delta \cos \psi)^2 + (y - i\delta \sin \psi)^2]^{1/2}. \quad (3.40)$$

Полагая здесь  $\delta \ll \tau$ , получим

$$\tilde{\tau} = \tau - i\delta \cos(\psi - \varphi) + O\left(\frac{\delta^2}{\tau}\right), \quad (3.43)$$

$$u = e^{ik\delta \cos(\psi - \varphi)} \frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{k\tau}}. \quad (3.44)$$

Функция  $e^{ik\delta \cos(\psi - \varphi)}$  является диаграммой направленности излучения и имеет вид овала, вытянутого в направлении  $\varphi = \psi$  (рис. 3.2). Изменяя угол  $\psi$ , можно осуществить вращение диаграммы направленности в плоскости  $yo\chi$ . Таким образом, смещение линейного источника в комплексное

пространство приводит к появлению направленного излучения в физическом пространстве.

Положим теперь в формуле (3.44)  $\varphi=0$  и  $|\eta| \ll 1$ . Тогда

$$ue^{-k\delta} = e^{-k\delta \frac{\eta^2}{2\tau^2}} \cdot \frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{k\tau}}, \quad \eta^2 \ll \tau^2, \quad (3.45)$$

т.е. поле вблизи максимума диаграммы излучения представляет собой гауссов пучок.

Сделаем несколько замечаний в связи с формулами (3.44) и (3.45). Во-первых, они могут применяться даже к остро направленным пучкам, когда параметр  $k\delta \gg 1$ , важно только, чтобы при этом сохранялось условие

$$\frac{k\delta^2}{\tau} \ll 1.$$

Во-вторых, гауссовы пучки можно еще рассматривать как совокупность комплексных лучей. Такая трактовка этих пучков дана, например, в статьях [4,5]. Довольно простая и красивая теория волновых пучков в свободном пространстве может быть построена с помощью метода параболического уравнения. Такой подход содержится в книге [6] и детально развивается в курсе квазиоптики, подготовленном для данной школы Л.А. Вайнштейном и Н.И.Лесик.

Формула (3.45) показывает, что поле, возникающее при дифракции гауссова пучка на клине, можно найти из известного решения задачи о дифракции цилиндрической волны, полагая в последнем координаты источника комплексными:



$$\tilde{x}_0 = x_0 + i\delta \cos \psi, \quad \tilde{y}_0 = y_0 + i\delta \sin \psi, \quad \delta \geq 0. \quad (3.46)$$

При этом вещественные величины  $R_1, R_2, \tau_0$  и  $\psi_0$ , входящие в формулы §§ 1, 2, нужно заменить на комплексные  $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{\psi}_0$  и  $\tilde{\tau}_0$ . В местных декартовых координатах (рис. 3.3)

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= [(x_1 - i\delta \cos \psi)^2 + (y_1 - i\delta \sin \psi)^2]^{1/2}, \\ \tilde{R}_2 &= [(x_2 - i\delta \cos \psi)^2 + (y_2 + i\delta \sin \psi)^2]^{1/2}, \\ \tilde{\tau}_0 &= [(x_0 + i\delta \cos \psi)^2 + (y_0 + i\delta \sin \psi)^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Накладывая условия  $\delta \ll R_1, R_2, \tau_0$ , получим отсюда приближенные соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= R_1 - i\delta \cos(\psi_1 - \psi), \\ \tilde{R}_2 &= R_2 - i\delta \cos(\psi_2 + \psi), \\ \tilde{\tau}_0 &= \tau_0 + i\delta \cos(\psi_0 - \psi). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Комплексный угол  $\tilde{\psi}_0$  находится из формулы

$$\sin \tilde{\psi}_0 = \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{\tau}_0} = \sin \psi_0 - i \frac{\delta}{\tau_0} \cos \psi_0 \sin(\psi_0 - \psi)$$

и равен

$$\tilde{\psi}_0 = \psi_0 - i \frac{\delta}{\tau_0} \sin(\psi_0 - \psi). \quad (3.49)$$

Пользуясь этими соотношениями, определим наиболее интересную, дифракционную часть поля. Вдали от границ падающей

в отраженной волне  $(\sqrt{k\varrho} |\cos \frac{\varphi \mp \varphi_0}{2}| \gg 1)$  она представляет собой краевую волну

$$u_d = u_0 \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left[ \left( \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n} \right)^{-1} \mp \left( \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n} \right)^{-1} \right] \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi k r}} \quad (3.50)$$

Здесь верхний знак относится к граничным условиям (3.04), а нижний - к граничным условиям (3.05);  $n = \frac{\alpha}{\pi}$ , где  $\alpha$  - внешний угол клина ( $\alpha > \pi$ ). Постоянная

$$u_0 = \frac{e^{ikr_0 - k\delta \cos(\varphi_0 - \varphi)}}{\sqrt{k r_0}} \quad (3.51)$$

есть первичное поле пучка, или, другими словами, поле падающего комплексного луча, на ребре клина. Полученное выражение (3.50) является естественным обобщением формулы Зоммерфельда (3.28) на случай дифракций гауссова пучка и может быть использовано для построения приближенной теории дифракции комплексных лучей.

Получим теперь асимптотические выражения для поля, пригодные вблизи направлений  $\varphi = \pi \mp \varphi_0$ ,  $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$ . Оказывается, что в этом случае мы не можем формально полагать комплексными величины  $\varrho$  и  $\chi$  в выражении (3.31). Дело в том, что математические операции, с помощью которых был совершен переход от формулы (3.30) к выражению (3.31), законны лишь для вещественных значений  $\varrho$  и  $\chi$ . Поэтому мы применим сейчас другой способ вычисления интеграла (3.30), допускающий как вещественные так и комплексные значения параметров  $\varrho$  и  $\chi$ .

Представим этот интеграл в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k\varphi s^2} ds}{s^2 - i s_0^2} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{s_0} J(\zeta), \quad (3.52)$$

где

$$J(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{t - \zeta}, \quad \zeta = \sqrt{k\varphi} s_0 e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (3.53)$$

Нетрудно проверить, что  $J(\zeta)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dJ}{d\zeta} + 2\zeta J = -2\sqrt{\pi}. \quad (3.54)$$

Откуда

$$J(\zeta) = -2\sqrt{\pi} e^{-\zeta^2} \int_0^{\zeta} e^{x^2} dx + C e^{-\zeta^2}. \quad (3.55)$$

Постоянная  $C$  определяется из значения  $J(\zeta)$  при  $\zeta \rightarrow 0$ .  
Из соображений непрерывности функции  $J(\zeta)$  ясно, что

$$C = J(0) = \int_{\Gamma_1} e^{-t^2} \frac{dt}{t} = i\pi \quad \text{при } \operatorname{Im} \zeta \geq 0, \quad (3.56)$$

$$C = J(0) = \int_{\Gamma_2} e^{-t^2} \frac{dt}{t} = -i\pi \quad \text{при } \operatorname{Im} \zeta \leq 0,$$

где контуры интегрирования  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  идут вдоль вещественной оси в положительном направлении, огибая точку  $t = 0$ .

Контур  $\Gamma_1$  огибает её снизу, а контур  $\Gamma_2$  - сверху. Замечая

далее, что

$$2\sqrt{\pi} \int_0^{i\infty} e^{-t^2} dt = i\pi, \quad (3.57)$$

находим

$$J = -2\sqrt{\pi} e^{-\zeta^2} \int_{i\infty \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \zeta)}^{\zeta} e^{x^2} dx,$$

или

$$J = -2\sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\tau^2} \int_{\infty \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \tau e^{i\frac{\pi}{4}})}^{\tau} e^{it^2} dt, \quad (3.58)$$

где

$$\tau = \sqrt{\kappa \rho} S_0 = \sqrt{2\kappa \rho} \cos \frac{\chi}{2}. \quad (3.59)$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa \rho s^2} \frac{ds}{s^2 - is_0^2} = -\frac{2\sqrt{\pi}}{S_0} e^{-i\tau^2} \int_{\infty \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \tau e^{i\frac{\pi}{4}})}^{\tau} e^{it^2} dt \quad (3.60)$$

и для функции (8.30) получаем выражение

$$W(\rho, \chi) = i2\sqrt{2\pi} \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\chi}{n}} e^{-i\tau^2} \int_{\infty \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \tau e^{i\frac{\pi}{4}})}^{\tau} e^{it^2} dt, \quad (3.61)$$

которое является обобщением прежней формулы (3.3I) на случай комплексных значений  $\varphi$  и  $\chi$ . При  $\text{Im} \tau \rightarrow 0$  выражение (3.6I) переходит в (3.3I), если комплексные функции  $\tau$  и  $\cos \frac{\chi}{2}$  определить так, чтобы при  $\text{Im} \tau \rightarrow 0$  они переходили в вещественные функции  $\sqrt{2} \kappa \varphi \cos \frac{\varphi \mp \chi_0}{2}$  и  $\cos \frac{\varphi \mp \chi_0}{2}$ . Таким образом, формула (3.6I) позволяет с помощью таблиц интегралов Френеля от комплексного аргумента [7,8] провести численное исследование полей, возникающих при дифракции гауссовых пучков на клине.

В заключение отметим, что данная задача рассматривалась другим методом в работе Хестанова [9], однако в ней нет простых формул, полученных выше.

В трёх прочитанных лекциях мы ознакомились лишь с некоторыми методами физической теории дифракции. К ней относится также и геометрическая теория дифракции, предложенная американским ученым Дж.Б.Келлером. Этому методу посвящен специальный курс в программе данной школы.

Результаты физической теории дифракции свидетельствуют об её плодотворности. Несомненно, что этот раздел теории дифракции будет развиваться и дальше, поскольку число задач, выдвигаемых практикой и недоступных для строгого решения, постоянно растет. В связи с этим повышается также роль строгих математических исследований, которые являются фундаментом физической теории дифракции.

### Задача

Убедиться, что выражение

$$u = \frac{1}{4\pi i n} \int_C G(\beta) \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi - \beta - \varphi + \varphi_0}{2n} + \operatorname{ctg} \frac{\pi - \beta - \varphi - \varphi_0}{2n} \right) d\beta$$

дает строгое решение задачи о дифракции на клине плоской и сферической волн. Здесь  $n = \frac{\alpha}{\pi}$ ,  $\alpha$  - внешний угол клина, контур  $C$  показан на рис. 3.1. При дифракции плоской волны

$$u = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

функция  $G(\beta)$  есть

$$G(\beta) = e^{ikr \cos \beta},$$

а при дифракции сферической волны

$$u = \frac{e^{ikR}}{kR}, \quad R = [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + (z - z_0)^2]^{1/2},$$

$$R = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2},$$

функция  $G(\beta)$  есть

$$G(\beta) = \frac{e^{ikR(\beta)}}{kR(\beta)}, \quad R(\beta) = [r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos \beta + (z - z_0)^2]^{1/2}.$$

Верхний знак в подынтегральном выражении относится к граничным условиям (3.04), нижний - к граничным условиям (3.05).

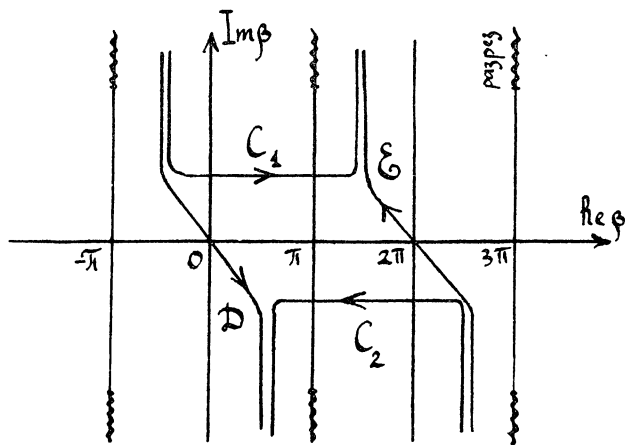


Рис. 3.1. Контуры интегрирования в формулах (3.02), (3.12).

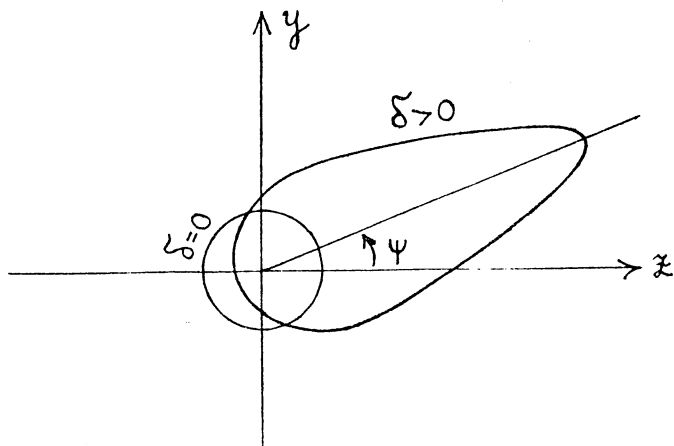


Рис. 3.2. Диаграмма излучения от источника с комплексными координатами  $x = \epsilon + i\delta \cos \psi$ ,  $y = 0 + i\delta \sin \psi$ .

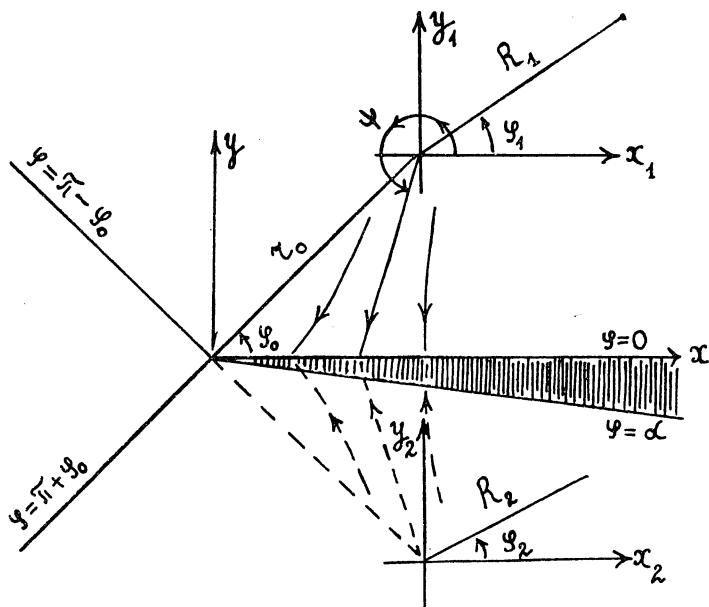


Рис. 3.3. К дифракции гауссового пучка на клине. (Ось пучка направлена вдоль луча  $\psi_1 = \psi$ ).



Литература

1. Ф. Франк и Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, М.-Л., 1937 (Глава XX).
2. W. Pauli. *Physical Review*, 54, № 11, 924-931, 1938.
3. А.А. Тужилин. *Акустический журнал*, 9, 168-1972, 1963.
4. J. v. Keller, W. Streifer. *Journal of Optic. Soc. America*, 61, № 1, 40-43, 1971.
5. Ю.А. Кравцов. Изв. вузов. Радиофизика, 10, № 9-10, 1283, 1967.
6. Л.А. Вайнштейн. Открытые резонаторы и открытые волноводы. Изд. "Сов. радио", М., 1966.
7. К.А. Карпов. Таблицы функции  $F(z) = \int_0^z e^{x^2} dx$  в комплексной области. Изд. АН СССР, М., 1958.
8. В.Н. Фадеева, Н.М. Терентьев. Таблицы значений интеграла вероятности от комплексного аргумента. ГИТТЛ, М., 1954.
9. Р.Х. Хестанов. Дифракция волнового пучка на полуплоскости. Известия вузов. Радиофизика, 11, № 9, 1398-1409, 1968.
10. Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes. Edited by J. J. Bowman, T. B. A. Senior, P. L. Uslenghi. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1969.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Введение .....	3
Лекция 1 Теория Кирхгофа-Котлера и дифракция электромагнитных волн на черных телах .....	4
§ 1. Принципы Гюйгенса в электродинамике .....	5
§ 2. Определение черного тела и теорема о тени в контуре .....	11
§ 3. Принцип дополнительности для тонких черных экранов .....	15
§ 4. Интегральный поперечник рассеяния для черных тел .....	16
§ 5. Поле, излучаемое черным телом в направлении на источник .....	17
§ 6. Дифракция на черном диске .....	20
Задача .....	23
Лекция 2 . Метод краевых волн .....	29
§ 1. Разбиение поверхностного тока на "равномерную" и "неравномерную" части .....	29
§ 2. Дифракция на клине .....	31
§ 3. Отражение электромагнитных волн от тел вращения .....	33
а) Поле, излучаемое равномерной частью тока ..	33
б) Поле, излучаемое неравномерной частью тока ..	36
в) Полное поле, отраженное телом .....	39
г) Пример .....	41
Задачи .....	42
Лекция 3 Дифракция цилиндрической волны и гауссова пучка на клине .....	50
§ 1. Дифракция цилиндрической волны на клине ..	50
(строгое решение в виде контурного интеграла)	
§ 2. Асимптотическое представление дифракционного поля .....	54

	стр.
§ 3. Дифракция гауссова пучка на клине .....	59
Задача .....	67

Петр Яковлевич Уфимцев

Три лекции по физической теории дифракции

Редактор З.И. Царькова

М 09729

Подписано к печати

24.04.1972

Формат 60 x 90 1/16. Бумага типогр.

Печ.л. 4,63 Уч.изд.л. 3,64 Тираж 400 экз.

Зак. 119

Цена 22 коп.

Издательство ЛГУ им.А.А.Жданова

199164, Ленинград, В-164, Университетская наб. 7/9

---

Ротапринт.

Фотоофсетная лаборатория ЛГУ им.А.А.Жданова.

цена 22 коп.